参考文献

[1] K. G. Wilson and J. B. Kogut, Phys. Rept. **12**, 75 (1974).

[2] K. G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).

[3] J. B. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D **11**, 395 (1975).

[4] M. Creutz, "Quarks, gluons and lattices", 1983, Cambridge Univ. Press.

連続極限と繰り込み群

- 連続極限 ($a \to 0$) は 2 次相転移 (臨界現象) に対応

$$m = \frac{1}{a} f(g) \quad : \quad g = g(a) \longrightarrow g_c \quad s.t. \quad f(g_c) = 0$$

$$\xi \text{ (相関距離)} \simeq \frac{1}{ma} = f(g)^{-1} \xrightarrow{a \to 0, g \to g_c} \infty$$

  - 2 次相転移の Universality
    場の自由度, 対称性の同じ理論は, 同じ Critical behavior を示す
    (Critical exponents, universal quantities)
    低エネルギー (Long-range) の物理は, 作用 $S_\Lambda[\phi]$ の微視的な詳細によらない
  - 量子論的な場の理論は, 有限個のパラメータで記述可能 (くりこみ可能性)
  - 場の自由度, 対称性の等しい, 局所的な格子上の作用は同じ連続極限を与える

- Wilson 的な繰り込み群の視点
  繰り込み群 $\equiv$ 局所的 な作用 $S_\Lambda[\phi]$ の空間 (Λ : cut-off) における Flow

  - Fixed point : (比較的) 局所的な作用 $S^*_\Lambda[\phi]$
  - relevant operators :
    Fixed point に近づくために fine-tuning の必要な op. (結合定数)
    線形化された繰り込み群変換の固有値 (scaling dim.) により分類
    有限, 少数
    Critical exponents は relevant op. の scaling dim. できまる ($\Rightarrow$ Universality)
  - Renormalized trajectory : relevant op. の張る部分空間
    $\Rightarrow$ 量子論的な場の理論は, 有限個のパラメータで記述可能 (くりこみ可能性)
  - Universality class : 同じ Fixed point に属する作用 $S_\Lambda[\phi]$ の集合
    $\Rightarrow$ 場の自由度, 対称性の等しい, 局所的な格子上の作用は同じ連続極限を与える

Transfer matrix : 正準量子化との関係

- Transfer matrix (temporal gauge : $U(\boldsymbol{x},0)=1$)

$$Z=\prod_t\left\{\prod_{\boldsymbol{x},k=1,2,3} dU(\boldsymbol{x},k)\,T(U_t,U_{t+1})\right\}$$

$$\begin{aligned}
T(U,U') &= \mathrm{e}^{-T_G(U)}\,\mathrm{e}^{-S(U,U')}\,\mathrm{e}^{-T_G(U')},\\
T_G(U) &= \sum_{\boldsymbol{x},ij}\frac{1}{2g_s^2}\mathrm{ReTr}\{1-P(\boldsymbol{x},ij)\},\\
S(U,U') &= \sum_{\boldsymbol{x},k}\frac{2}{g_t^2}\mathrm{ReTr}\{1-U(\boldsymbol{x},k)\cdot U'(\boldsymbol{x},k)^{-1}\}
\end{aligned}$$

  - Hermitian, bounded, gauge-invariant, positive-definite

- 正準形式

  - Hilbert space

$$\mathcal{H}_G=\{\psi[U(\boldsymbol{x},k)]\in\mathbb{C}\mid 0\le(\psi,\psi)<\infty\}$$

$$(\psi,\phi)=\int\prod_{\boldsymbol{x},k}dU(\boldsymbol{x},k)\,\psi[U]^*\phi[U]$$

  - $\{\hat{U},\hat{L}^a\},\hat{H}$

$$\hat{U}|U\rangle=U|U\rangle;\quad \langle U|U'\rangle=\delta(U,U')\quad (U,U'\in G)$$

$$\hat{R}(g)|U\rangle=|g\cdot U\rangle;\quad \hat{R}(g)=\mathrm{e}^{i\omega^a\hat{L}^a}\quad (g=\mathrm{e}^{i\omega^aT^a}\in G)$$

$$\hat{H}=-\frac{1}{a_0}\ln\hat{T};\quad \langle U|\hat{T}|U'\rangle=T(U,U')$$

  - $a_0\to0$ limit

$$\frac{1}{g_t^2}\to\frac{a}{a_0}\frac{1}{g^2};\quad \frac{1}{g_s^2}\to\frac{a_0}{a}\frac{1}{g^2}:\quad \hat{L}^a\to\frac{a_0}{a}\hat{L}^a\quad \text{(rescaling)}$$

$$a\hat{H}=\sum_{\boldsymbol{x},k}\frac{g^2}{2}\hat{L}^a(\boldsymbol{x},k)\hat{L}^a(\boldsymbol{x},k)+\sum_{\boldsymbol{x},ij}\frac{1}{g^2}\mathrm{ReTr}\{1-\hat{P}(\boldsymbol{x},ij)\}$$