問題 I [**実スカラー場の格子作用**]

次の作用で記述される実スカラー場理論 (ϕ^4 理論) を考える:

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}\partial_\mu \phi(x)\partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi(x)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi(x)^4 \right\}$$

1. 微分 $\partial_\mu \phi(x)$ を差分 $\frac{1}{a}[\phi(x+\hat{\mu}a) - \phi(x)]$ に置き換えることによって, 4 次元ユークリッド格子上の作用を求めよ。

2. $\lambda = 0$ として，スカラー場の相関関数 $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$ を求めよ。

3. $a^2m^2 = (1-2g-8\kappa)/\kappa$, $\lambda = 6g/\kappa^2$, $a\phi(x) \to (2\kappa)^{1/2}\phi(x)$ の置き換えを行い, 格子作用を書き換えよ。$g \to \infty$ の極限が Ising 模型に対応することを確かめよ。

問題 II [**格子ゲージ場の作用の任意性**]

SU(N) 格子ゲージ理論の作用として次のものを考える:

$$S_I = a^4 \sum_{x,\mu,\nu} \frac{1}{g^2} \left\{ c_0 \frac{1}{N}\mathrm{Re\,Tr}\,(1 - P(x,\mu,\nu)) + c_1 \frac{1}{N}\mathrm{Re\,Tr}\,(1 - R(x,\mu,\nu)) \right\}$$

ただし，

$$\begin{aligned} P(x,\mu,\nu) &= U(x,\mu)U(x+\hat{\mu},\nu)U(x+\hat{\nu},\mu)^{-1}U(x,\nu)^{-1}, \\ R(x,\mu,\nu) &= U(x,\mu)U(x+\hat{\mu},\nu)U(x+\hat{\mu}+\hat{\nu},\nu)U(x+2\hat{\nu},\mu)^{-1}U(x+\hat{\nu},\nu)^{-1}U(x,\nu)^{-1}. \end{aligned}$$

$a \to 0$ の極限 (古典連続極限) で, 連続理論の SU(N)Yang-Mills 理論の作用を再現するためには係数 c_0, c_1 の間に $c_0 + 8c_1 = 1$ の関係が必要になることを示せ。

問題 III [**格子ゲージ場の作用の改良**]

問題 II の SU(N) 格子ゲージ理論の作用において, $c_1 = -1/12$ とおけば, $a \to 0$ の極限 (古典連続極限) で $\mathcal{O}(a^2)$ の補正項がゼロになることを確かめよ。

(注 1) $c_1 = -1/12$ にとったものは, Symanzik の on-shell improved action を与える。(M. Symanzik, NP B226 (1983) 187-204, 205-227, P. Weisz, NP B212 (1983) 1-17, P. Weisz and R. Wohlert, NP B236 (1984) 397-422.)
(注 2) $c_1 = -3.331$ にとったものは, RG-improved Iwasaki action と呼ばれる，繰り込み群的に改良された作用を与える。(Y. Iwasaki, NP B258 (1985) 141-156, UTHEP-118 (1983))