

まとめ 9. いろいろな波動方程式, 2, 3次元の波動

いろいろな波動方程式：

- 音波

1次元(長い管の中)の場合: $\xi(t, x)$: 空気の変位, $\delta p(t, x)$: 圧力の変化

$$\delta p = -K \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} \quad (K : \text{体積弾性率}, \delta p = -K \delta V/V)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \delta p(t, x)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 \delta p(t, x)}{\partial x^2} \quad (\rho : \text{空気の密度})$$

3次元の場合: $\xi(t, x, y, z)$: 空気の変位, $p(t, x, y, z)$: 圧力の変化

$$\delta p = -K \nabla \cdot \xi(t, x)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \xi(t, x)), \quad \frac{\partial^2 \delta p(t, x)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \nabla \cdot \nabla \delta p(t, x)$$

- 水の波

浅い場合: $\xi(t, x)$: 波の進行方向への水の変位

$$\frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial t^2} = gh_0 \frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial x^2} \quad (h_0 : \text{水深})$$

一般の場合: $\xi(t, x, y, z) = {}^t(\xi(t, x, z), 0, \eta(t, x, z))$: 水の変位

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi(t, x, z)}{\partial t^2} &= -\frac{\partial p(t, x, z)}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial^2 \eta(t, x, z)}{\partial t^2} &= -\frac{\partial p(t, x, z)}{\partial z} - \rho g \\ \frac{\partial \xi(t, x, z)}{\partial x} + \frac{\partial \eta(t, x, z)}{\partial z} &= 0 \\ \eta(x, -h_0, t) &= 0, \quad p(x, \eta(x, 0, t), t) = P_0(\text{大気圧}) \quad (\text{境界条件}) \end{aligned}$$

- 電磁場

マックスウェル方程式

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

電磁波の波動方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

(ここで $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ は光速を与える.)

- シュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y, z, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z, t) + V(x, y, z, t) \psi(x, y, z, t)$$

(この波動方程式の分散関係は、 $V = 0$ のとき、 $\hbar\omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$ で与えられる。これは、アインシュタイン-ドブロイの関係 $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ を使うと自由粒子のエネルギー E と運動量 p の間の関係 $E = \frac{p^2}{2m}$ に対応することがわかる。)

参考文献

- [1] 美しくなくてはならない —現代科学の偉大な方程式—
グレアム・ファームロ (編者), 斉藤隆央 (訳), 紀伊国屋書店
- [2] ファインマン物理学 V 量子力学, 岩波書店