例題 9 (気柱の振動)

断面積 S の円筒形の筒の中の空気の振動を考える。x 軸を図 1 のようにとり，空気の x 軸方向の変位を $\xi(t,x)$ とする．他の方向への変位はないものとする．また，空気の変位に伴う圧力の変化を，大気圧を p_0 として，$p(t,x) = p_0 + \delta p(t,x)$ と表す．

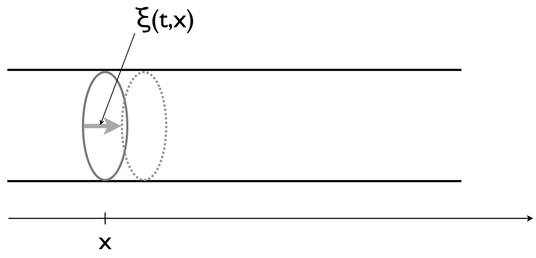

図 1: 円筒形の筒の中の空気の振動

1. 筒は十分長いものとして，境界の影響はないものとする．図 2 のように，振動していないときに区間 $[x, x+\Delta x]$ にある空気の部分を X として，以下の問に答えよ．

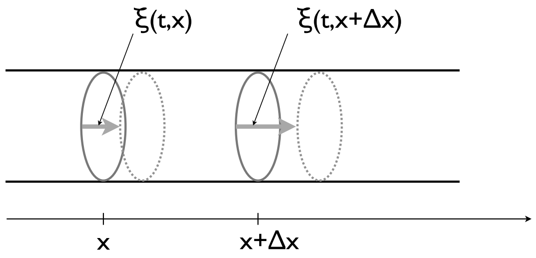

図 2: 空気の部分 X

   (a) 空気の部分 X は，振動していないときに体積 $V = S\Delta x$ を占める．空気の部分 X が占める体積の変化 δV を，S, $\xi(t,x)$, $\xi(t,x+\Delta x)$ を使って表せ．

   (b) 空気の体積の変化と圧力の変化の間には $\delta p = -K\frac{\delta V}{V}$ の関係が成り立つ．ここで K は体積弾性率である ($\kappa = 1/K$ は圧縮率と呼ばれる)．このとき，$\delta p(t,x)$ と $\xi(t,x)$ の関係を求めよ．

   (c) 空気の部分 X に働く力を S, $\delta p(t,x)$, $\delta p(t,x+\Delta x)$ を使って表し， 空気の部分 X の運動方程式を求めよ．ただし，空気の密度を ρ とする．

   (d) $\xi(t,x)$ の満たす方程式を求めよ．

2. 筒の長さは L として，図 3 のように，左端 $(x=0)$ は閉じていて，右端 $(x=L)$ は開かれているものとする．

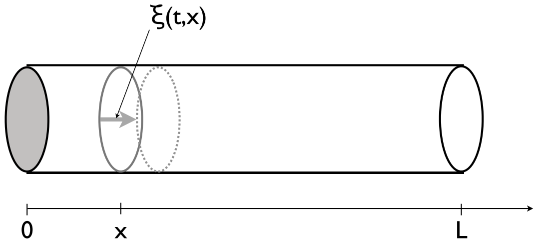

図 3: 気柱の振動

(a) 筒の両端 $x=0$, $x=L$ で，空気の変位 $\xi(t,x)$ はどのような境界条件を満たすべきか，述べよ．

(b) 筒の中の空気の微小振動の基準振動を求めよ．

(解答例)

1. (a)

$$\delta V = S(\xi(t,x+\Delta x)-\xi(t,x))$$

(b)

$$\delta p(t,x) = -K\frac{S(\xi(t,x+\Delta x)-\xi(t,x))}{S\Delta x}$$

$$\therefore \quad \delta p(t,x) = -K\frac{\partial \xi(t,x)}{\partial x} \quad (\Delta x \to 0)$$

(c)

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial t^2} = -S(\delta p(t,x+\Delta x)-\delta p(t,x))$$

$$\therefore \quad \rho\frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial t^2} = -\frac{\partial \delta p(t,x)}{\partial x} \quad (\Delta x \to 0)$$

(d) (b), (c) の結果より，

$$\frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial x^2}$$

2. (a) $x=0$ では空気の変位はないので，$\xi(t,0)=0$ が成り立つべきである．$x=L$ では，空気はあらゆる方向に移動することができ，このとき，圧力の変化は起こらない．したがって $p(t,L)=0$ が成り立つべき．これより，$\frac{\partial \xi}{\partial x}(t,L)=0$ が成り立つべきである．

(注) 開口端補正

(b) 基準振動解を $\xi(t,x) = (a\cos kx + b\sin kx)\cos(\omega t + \alpha)$ と仮定する。この解が波動方程式を満たすためには $\omega^2 = \frac{K}{\rho}k^2$ が必要である。境界条件 $\xi(t,0) = 0$，$\xi'(t,L) = 0$ より $a = 0$，$kb\cos kL = 0$。したがって $k = (m+1/2)\pi/L$ $(m = 0, 1, \cdots, \infty)$ となる。これより基準振動解は

$$\omega_{[m]} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}\left(\frac{(m+1/2)\pi}{L}\right) \quad (m = 0, 1, \cdots, \infty)$$

$$\xi(t,x) = A_{[m]}\sin\left[\left(\frac{(m+1/2)\pi}{L}\right)x\right]\cos(\omega_{[m]}t + \alpha_{[m]})$$