

まとめ 8. 屈折, 回折 – 2次元の波動

2次元の波動方程式：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(t, x, y) = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(t, x, y)$$

基準振動解 (平面波)：

$$\Psi(t, x, y) = C e^{i(k_x x + k_y y - \omega(k)t)} \quad \omega(k) = v \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = v k$$

波速の異なる二つの領域の境界面 ($x = 0$) による屈折： 波速 $v_1(x < 0)$, $v_2(x > 0)$

入射波+反射波 ($x < 0$)

$$\Psi_1(t, x, y) = C_1 e^{i(k_x x + k_y y - \omega_1(k)t)} + C'_1 e^{i(-k'_x x + k'_y y - \omega_1(k')t)}$$

透過波 ($x > 0$)

$$\Psi_2(t, x, y) = C_2 e^{i(q_x x + q_y y - \omega_2(q)t)}$$

境界条件 (振幅の連続性)

$$\Psi_1(t, x, y)|_{x=0} = \Psi_2(t, x, y)|_{x=0}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \Psi_1(t, x, y) \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial}{\partial x} \Psi_2(t, x, y) \right|_{x=0}$$

$$\omega_1(k) = \omega_1(k') = \omega_2(q)$$

$$k_y = k'_y = q_y$$

$$C_1 + C'_1 = C_2$$

$$k_x C_1 - k'_x C'_1 = q_x C_2$$

これより

$$k_x = k'_x (> 0)$$
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{k}{q} = \frac{k_y}{\sin \theta_1} \times \frac{\sin \theta_2}{q_y} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad (\text{スネルの法則})$$

スリットによる回折：

入射波+反射波 ($x < 0$)

$$\Psi_1(t, x, y) = C_1 e^{i(k_x x - \omega(k)t)} + C'_1 e^{i(-k'_x x - \omega(k')t)}$$

スリット通過時 ($x = 0$)

$$\Psi_1(t, x, y) = C_0 e^{i(k_x x - \omega(k)t)} f(y)$$

ここで $f(y)$ はスリットによるマスク効果を表す階段関数：

$$f(y) = \begin{cases} 0 & (x < -a/2) \\ 1 & (-a/2 \leq x \leq a/2) \\ 0 & (x > a/2) \end{cases} = \int \frac{dq_y}{2\pi} \left(\frac{2}{q_y} \right) \sin \left(\frac{q_y a}{2} \right) e^{iq_y y}$$

スリット通過後 ($x > 0$)

$$\Psi_2(t, x, y) = C_2 \int \frac{dq_y}{2\pi} \left(\frac{2}{q_y} \right) \sin \left(\frac{q_y a}{2} \right) e^{i(\sqrt{k_x^2 - q_y^2} x + q_y y - \omega(q)t)}$$

境界条件 (振幅の連続性)

$$\Psi_1(t, x, y)|_{x=0} = \Psi_2(t, x, y)|_{x=0}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \Psi_1(t, x, y) \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial}{\partial x} \Psi_2(t, x, y) \right|_{x=0}$$

$$\omega(k) = \omega(k') = \omega(q)$$

$$C_1 + C'_1 = C_0 = C_2$$

$$k_x^2 = q_x^2 + q_y^2 = \omega^2/v^2$$

スリット通過後の波動の主要なフーリエ成分：

$$\frac{q_y a}{2} = \frac{q a \sin \theta}{2} \lesssim \pi$$

$$\therefore \sin \theta \lesssim \frac{2\pi}{qa} = \frac{2\pi}{ka} = \frac{\lambda}{a}$$

すなわち、 $\lambda \ll a$ のとき、 $\theta \ll 1$. $\lambda \simeq a$ のとき、 $\theta \simeq \pi/2$

あるいは、スリットをより絞れば、より大きく拡がる (回折する) .