まとめ　7. 反射と透過，定在波

境界による反射・透過，定在波：

1. 弦の区間 $x \in [-\infty, 0]$
   - $x=0$ で固定端

$$y(t,x) = f(x-vt) - f(-(x+vt))$$

$\because)$　$x=0$ において，任意の時刻 t で，固定端条件が成り立つ：

$$\begin{aligned} & 0 = f(-vt) + g(vt) \\ \therefore \quad & g(\xi) = -f(-\xi) \end{aligned}$$

   - $x=0$ で自由端

$$y(t,x) = f(x-vt) + f(-(x+vt)) + c \qquad (c=0)$$

$\because)$　$x=0$ において，任意の時刻 t で，自由端条件が成り立つ：

$$\begin{aligned} & 0 = f'(-vt) + g'(vt) \\ \therefore \quad & 0 = f'(-\xi) + g'(\xi) \quad \text{すなわち} \quad 0 = \frac{d}{d(-\xi)} f(-\xi) + \frac{d}{d\xi} g(\xi) \\ \therefore \quad & g'(\xi) = -f'(-\xi) \\ \therefore \quad & g(\xi) = f(-\xi) + c \end{aligned}$$

2. 弦の区間 $x \in [0, L]$，両固定端

$$y(t,x) = f(x-vt) - f(-x-vt), \quad \text{ただし，} \quad f(\xi + 2L) = f(\xi)$$

$\because)$　$x=0, L$ において，任意の時刻 t で，固定端条件が成り立つ：

$$\begin{aligned} & 0 = f(-vt) + g(vt) \quad \text{かつ} \quad 0 = f(L-vt) + g(L+vt) \\ \therefore \quad & g(\xi) = -f(-\xi) \quad \text{かつ} \quad g(\xi + L) = -f(-\xi + L) \\ \therefore \quad & g(\xi) = -f(-\xi) \quad \text{かつ} \quad f(-\xi - L) = f(-\xi + L) \end{aligned}$$

$f(\xi + 2L) = f(\xi)$ より，$f(\xi)$ をフーリエ級数展開すると

$$f(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ a_m \cos\left[\xi\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] + b_m \sin\left[\xi\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] \right\}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad y(t,x) &= \sum_{m=1}^{\infty}\left\{a_m \cos\left[(x-vt)\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] + b_m \sin\left[(x-vt)\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right]\right\} \\
&- \sum_{m=1}^{\infty}\left\{a_m \cos\left[-(x+vt)\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] + b_m \sin\left[-(x+vt)\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right]\right\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)x\right]\left\{(2a_m)\sin\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)vt\right] + (2b_m)\cos\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)vt\right]\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$\left(\frac{m\pi}{L}\right) = k_{[m]}$，$\left(\frac{m\pi}{L}\right)v = \left(\frac{m\pi}{L}\right)\sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \omega_{[m]}$，および，$k_{[m]}v = \omega_{[m]}$.