

例題 7 (2 種類の弦の接続)

線密度 σ_1 の弦 1 と線密度 σ_2 の弦 2 を一点で接続し、張力 T である。弦にそって座標 x を導入し、接続点を $x = 0$ とすると、弦 1 は区間 $[-\infty, 0]$ に、弦 2 は区間 $[0, \infty]$ にある。

1. 弦 1 から正の方向に入射してきた波の振幅を $f_1(x - v_1t)$ とするとき、接続点で生じる反射波と透過波の振幅をもとめよ。ただし、 $v_1 = \sqrt{\frac{T}{\sigma_1}}$ である。
2. $n = \frac{v_1}{v_2}$ とおく。 $n \nearrow \infty$ および $n \searrow 0$ の極限での反射波の振る舞いを調べよ。

(解答例)

1. 区間 $x \in [-\infty, 0]$ の弦 1 の振幅を $y_1(t, x)$ 、区間 $x \in [0, \infty]$ の弦 2 の振幅を $y_2(t, x)$ とする。 $f_1(x - v_1t)$ を入射波、 $g_1(x + v_1t)$ を反射波、 $f_2(x - v_2t)$ を透過波とおけば、解の一般形は次のようにあらわすことができる。

$$\begin{aligned} y_1(t, x) &= f_1(x - v_1t) + g_1(x + v_1t) & (x \in [-\infty, 0]), \\ y_2(t, x) &= f_2(x - v_2t) & (x \in [0, +\infty]). \end{aligned}$$

$x = 0$ において、任意の時刻 t で、振幅の値と傾きが一致すべき：

$$\begin{aligned} f_1(-v_1t) + g_1(v_1t) &= f_2(-v_2t), \\ f_1'(-v_1t) + g_1'(v_1t) &= f_2'(-v_2t). \end{aligned}$$

第 2 式を t で積分する：

$$-\frac{1}{v_1}f_1(-v_1t) + \frac{1}{v_1}g_1(v_1t) = -\frac{1}{v_2}f_2(-v_2t) + c.$$

これより

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}f_1(-\xi) + \frac{v_1v_2}{(v_1 + v_2)}c, \\ f_2(\xi) &= f_1\left(\frac{v_1}{v_2}\xi\right) + g_1\left(-\frac{v_1}{v_2}\xi\right) = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}f_1\left(\frac{v_1}{v_2}\xi\right) + \frac{v_1v_2}{(v_1 + v_2)}c. \end{aligned}$$

入射波 $f_1(x - v_1t)$ がゼロのとき、反射波 $g_1(x + v_1t)$ 、透過波 $f_2(x - v_2t)$ はゼロとなるべき。したがって $c = 0$ 。これより、

$$\begin{aligned} y_1(t, x) &= f_1(x - v_1t) + \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}f_1(-x - v_1t), \\ y_2(t, x) &= \frac{2v_2}{v_1 + v_2}f_1\left(\frac{v_1}{v_2}(x - v_2t)\right). \end{aligned}$$

$n = \frac{v_1}{v_2}$ (屈折率) とおけば、解はつぎのように表すことができる：

$$\begin{aligned} y_1(t, x) &= f_1(x - v_1t) + \frac{1 - n}{1 + n}f_1(-x - v_1t), \\ y_2(t, x) &= \frac{2}{1 + n}f_1(n(x - v_2t)). \end{aligned}$$

2. $n \gg 1$ となるのは $\frac{v_1}{v_2} \gg 1$, すなわち, $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \gg 1$ とき. これは弦 2 が弦 1 にくらべて重くなる極限に対応する. この極限で解は次のようになる:

$$\begin{aligned}y_1(t, x) &= f_1(x - v_1 t) - f_1(-x - v_1 t), \\y_2(t, x) &= 0.\end{aligned}$$

これは固定端条件での解に一致する.

- $n \ll 1$ となるのは $\frac{v_1}{v_2} \ll 1$, すなわち, $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ll 1$ とき. これは弦 2 が弦 1 にくらべて軽くなる極限に対応する. この極限で解は次のようになる:

$$\begin{aligned}y_1(t, x) &= f_1(x - v_1 t) + f_1(-x - v_1 t), \\y_2(t, x) &= 2f_1(-v_1 t).\end{aligned}$$

これは自由端条件での解に一致する.