まとめ　6. 弦を伝わる波，進行波，波束，分散，群速度

弦の波動方程式の"因数分解"：　$\sqrt{\frac{T}{\sigma}} = v\ (>0)$ とおく．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) y(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right) y(t,x) = 0$$

弦の波動方程式の一般解：　正・負方向の進行波の重ね合わせ

$f(x)$, $g(x)$ を任意の関数とすれば，

$$y(t,x) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

$\because$)　$\phi_\pm = x \pm vt$ とおく．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \mp v\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_\pm = 0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \mp v\frac{\partial}{\partial x}\right)F(\phi_\pm) = \frac{\partial F(\phi_\pm)}{\partial \phi_\pm}\left(\frac{\partial}{\partial t} \mp v\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_\pm = 0.$$

※) $\phi_\mp =$ 一定 $\Rightarrow \Delta\phi_\mp = \Delta x \mp v\Delta t = 0.$

振幅が同じ大きさをとる点は速度 $\pm v$ で進行していく (進行波)．

波の伝播の速さ：

弦を伝わる波：

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

空気中を伝わる波 (音波)：

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{1.4 \times 1.01 \times 10^5 (\mathrm{Pa})}{28.8 \times 10^{-3}(\mathrm{kg})/22.4 \times 10^{-3}(\mathrm{m}^3)}} \simeq 331\,(\mathrm{m/s}) \quad (0\,℃)$$

$\because$)　$pV^\gamma =$ 一定 (断熱過程) より $\Delta p V^\gamma + \gamma p V^{\gamma-1} = 0$

$$\therefore \quad \Delta p = -\gamma p \frac{\Delta V}{V} \qquad \text{すなわち} \quad K = \gamma p$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

温度補正：

$$\frac{p}{\rho} \simeq RT$$

$$v = 332(1 + 0.00166 \times t(℃)) \simeq 343\,(\mathrm{m/s}) \quad (20\,℃)$$

波動方程式の解法：

波数 k によるフーリエ変換を仮定する：

$$y(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{ikx}\, C(k,t), \qquad C^*(-k,t) = C(k,t)$$

これを波動方程式に代入する．$C(k,t)$ は単振動の方程式を満たす:

$$\ddot{C}(k,t) = -\omega^2(k) C(k,t)$$

したがって，

$$C(k,t) = C_+(k)\,\mathrm{e}^{-i\omega(k)t} + C_-(k)\,\mathrm{e}^{+i\omega(k)t}, \qquad C_+(-k)^* = C_-(k)$$

ここで $\omega(k)$ は波動方程式の種類によって関数型が異なる．

例 1)

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} \quad \Longrightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}\,|k|$$

例 2)

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} - \omega_0^2\, y(t,x) \quad \Longrightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{T}{\sigma}k^2 + \omega_0^2}$$

例 3)

$$i\hbar\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} \quad \Longrightarrow \quad \omega(k) = \frac{\hbar}{2m}k^2 \quad \left(\mathrm{cf.}\ E = \frac{p^2}{2m}\right)$$

一般解：

$$y(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{ikx}\left\{C_+(k)\,\mathrm{e}^{ikx-i\omega(k)t} + C_-(k)\,\mathrm{e}^{ikx+i\omega(k)t}\right\}$$

例) $\omega(k) = v|k|$ のとき，

$$\begin{aligned} y(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \left\{\mathrm{e}^{ik(x-vt)}\,\tilde{f}(k) + \mathrm{e}^{ik(x+vt)}\,\tilde{g}(k)\right\} \\ &= f(x-vt) + g(x+vt) \end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= C_+(k)\theta(k) + C_+^*(-k)\theta(-k) \\ \tilde{g}(k) &= C_-(k)\theta(k) + C_-^*(-k)\theta(-k) \end{aligned}$$

分散：　波の伝わる速さ $v = \omega(k)/k$ (位相速度) が，波数 k に依存して，変化すること．

波束：　ある限られた範囲の波数 k の波の重ね合わせとして表される波

例) ガウス型波束　$k - k_0 \in [-\Delta k, \Delta k]$

$$y(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{i(kx-\omega(k)t)}\, \mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2}}$$

(注１）不確定性関係 $\Delta x \Delta k \simeq 1$ より，空間的にもある領域に限られる．

例えば，$\omega(k)/k = v$ (一定) のとき，ガウス型波束は次の様に振る舞う:

$$y(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta x}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-vt)^2}{2(\Delta x)^2}}\, \mathrm{e}^{ik_0(x-vt)}$$

(注２）位相速度 $v = \omega(k)/k$ が波数 k に依存して変わる場合には，時間発展とともに波形も変化していく．(分散)

群速度：　分散がある場合の波束の進行速度

$$v_g = \left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k=k_0}$$

例１）進行する"うなり"

$$\begin{aligned} y(t,x) &= A\cos(k_1 x - \omega_1 t) + A\cos(k_2 x - \omega_1 t) \\ &= 2A\, \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(k_{\mathrm{av}}x - \omega_{\mathrm{av}}t\right) \end{aligned}$$

ここで $\Delta k = k_2 - k_1$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$．振動数 $\frac{\Delta\omega}{2}$ のうなりは，$v = \Delta\omega/\Delta k$ で進行．

例２）ガウス型波束: $\omega(k) = \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k=k_0}(k-k_0) + \cdots$ より

$$y(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{i(kx-\omega(k)t)}\, \mathrm{e}^{-\frac{(\Delta x)^2(k-k_0)^2}{2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta x}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-v_g t)^2}{2(\Delta x)^2}}\, \mathrm{e}^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}$$

(注) この場合，正確には，時間発展とともに波形はガウス型から変化していく．