まとめ　5. 弦の基準振動解の直交性と完全性，フーリエ級数展開，フーリエ変換

弦の基準振動：

$$
\begin{aligned}
y(t,x) &= \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]\,A_{[m]}\cos(\omega_{[m]}t+\alpha_{[m]}) \\
&= \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]\,\left\{a_{[m]}\cos(\omega_{[m]}t)+b_{[m]}\sin(\omega_{[m]}t)\right\}
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\omega_{[m]}^2 = \frac{T}{\sigma}\left(\frac{\pi}{L}m\right)^2 \quad (m=1,2,\cdots,\infty)
$$

解法：

$$
y(t,x) = [a\cos(kx)+b\sin(kx)]\,\cos(\omega t+\alpha)
$$

とおく (この解の形は並進対称性を満たしていることに注意)：

$$
\omega^2 = \frac{T}{\sigma}k^2
$$

$$
a=0, \qquad [a\cos(kL)+b\sin(kL)]=0
$$

$$
\therefore\quad a=0, \qquad k=\frac{\pi}{L}m \quad (m=1,2,\cdots,\infty)
$$

※) $m=0$ は自明な解．m が負の整数の場合は，正の整数 $m'=-m$ の解に帰着する．

一般解：

$$
y(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]\,\left\{a_{[m]}\cos(\omega_{[m]}t)+b_{[m]}\sin(\omega_{[m]}t)\right\}
$$

初期条件：

$$
\begin{aligned}
y(0,x) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]\,a_{[m]} \\
\frac{\partial y}{\partial t}(0,x) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]\,b_{[m]}\omega_{[m]}
\end{aligned}
$$

基準振動解の構造：

$$e^{[m]}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L} m\right) x\right] \qquad (x \in [0, L])$$

直交性：

$$\int_0^L dx\; e^{[m]}(x)\, e^{[m']}(x) = \delta_{mm'}$$

完全性 (フーリエ級数展開)：

$f(x)$ は区間 $[0, L]$ において連続で，区分的になめらかな関数であるとする．また $f(0) = 0$, $f(L) = 0$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{[m]}(x) \left\{ \int_0^L dy\; e^{[m]}(y)\, f(y) \right\} \\ &= \int_0^L dy\; \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} e^{[m]}(x)\, e^{[m]}(y) \right\} f(y) \end{aligned}$$

(計算メモ)

$$\begin{aligned} & \int_0^L dx\; e^{[m]}(x)\, e^{[m']}(x) \\ = & \int_0^L dx\; \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L} m\right) x\right] \times \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L} m'\right) x\right] \\ = & \int_0^L dx\; \frac{1}{L} \left\{ \cos\left[\left(\frac{\pi}{L}(m - m')\right) x\right] - \cos\left[\left(\frac{\pi}{L}(m + m')\right) x\right] \right\} \\ = & \begin{cases} \frac{1}{L}\left(L - \frac{L}{\pi(2m)} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L}(2m)\right) x\right]\Big|_0^L \right) & (m = m') \\ \frac{1}{L}\left[\frac{L}{\pi(m-m')} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L}(m - m')\right) x\right] - \frac{L}{\pi(m+m')} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L}(m + m')\right) x\right] \right]_0^L & (m \neq m') \end{cases} \\ = & \begin{cases} 1 & (m = m') \\ 0 & (m \neq m') \end{cases} \end{aligned}$$

Theorem：

関数 $f(x)$ が区間 $[-L,L]$ で連続かつ区分的になめらかで，$f(-L)=f(L)$ を満たすとき，$f(x)$ はフーリエ級数に展開される．すなわち

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{a_m\cos\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right]+b_m\sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right]\right\}. \qquad (1)$$

(注１）この級数は一様絶対収束する．

(注２）係数は以下のように与えられる：

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}dx\, f(x),\\
a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}dx\,\cos\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right]\, f(x),\\
b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}dx\,\sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right]\, f(x).
\end{aligned}$$

(注３) 定理の条件は次のように拡張することができる．

1. 「関数 $f(x)$ が区間 $[-L,L]$ で区分的になめらかで，$\cdots$ 」
   このとき，級数は不連続点を含まない閉区間で一様収束する．不連続点 x_0 においては，$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ に収束する．

Lemma 1：

関数 $F(x)$ は区間 $[0, L]$ で連続かつ区分的になめらかで，$F(0) = F(L) = 0$ を満たすとする．このとき，

$$f(x) = \begin{cases} F(x) & x \in [0, L] \\ -F(-x) & x \in [-L, 0] \end{cases}$$

は奇関数であり，次のようにフーリエ級数展開される：

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] \qquad (x \in [-L, L]).$$

これより

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{b}_m \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] \qquad (x \in [0, L]).$$

(注）係数 $\tilde{b}_m$ 以下のように与えられる：

$$\tilde{b}_m = \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] F(x).$$

Lemma 2：

関数 $G(x)$ は区間 $[0, L]$ で連続かつ区分的になめらかで，$G'(0) = G'(L) = 0$ を満たすとする．このとき，

$$g(x) = \begin{cases} G(x) & x \in [0, L] \\ G(-x) & x \in [-L, 0] \end{cases}$$

は偶関数であり，次のようにフーリエ級数展開される：

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] \qquad (x \in [-L, L]).$$

これより

$$G(x) = \tilde{a}_0\sqrt{\frac{1}{L}} + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_m \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] \qquad (x \in [0, L]).$$

(注）係数 $\tilde{a}_m$ 以下のように与えられる：

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= \int_0^L dx \sqrt{\frac{1}{L}}\, G(x), \\ \tilde{a}_m &= \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] G(x). \end{aligned}$$

複素指数関数によるフーリエ級数展開：

関数 $f(x)$ が区間 $[-L, L]$ で連続かつ区分的になめらかで，$f(-L) = f(L)$ を満たすとき，$f(x)$ はフーリエ級数に展開される．すなわち

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \, \mathrm{e}^{i\frac{m\pi}{L}x}.$$

(注１）係数は以下のように与えられる：

$$c_m \;\; = \;\; \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx \, \mathrm{e}^{-i\frac{m\pi}{L}x} \, f(x).$$

(注２）$c_m^* = c_{-m}$，$c_m = (a_m - ib_m)/2$.

(注３）正規直交系：　$\phi^{[m]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \, \mathrm{e}^{i\frac{m\pi}{L}x}$ とすれば,

$$\int_{-L}^{L} dx \, \{\phi^{[m]}(x)\}^* \phi^{[m']}(x) = \delta_{mm'}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi^{[m']}(x) \, \{\phi^{[m]}(y)\}^* = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \, \mathrm{e}^{i\frac{m\pi}{L}(x-y)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - y + 2Ln)$$

フーリエ変換：

関数 $f(x)$ が区間 $[-\infty, \infty]$ において区分的になめらかで，$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ が収束する(絶対可積分)とき，

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-ikx} f(x),$$

とすれば，つぎが成り立つ:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{ikx} \tilde{f}(k).$$

不確定性関係：

$$\Delta x\, \Delta k \quad \geq \quad 1$$

例)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta x}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{f}(k) = \mathrm{e}^{-(\Delta x)^2 k^2/2}$$

$$f(x) = \begin{cases} A & (x \in [-a, a]) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{f}(k) = 2A\frac{\sin(ka)}{k}$$