例題 5+ (弦の振動 [中点をはじく場合] とフーリエ級数展開)

弦が両端を固定して張られている．弦の線密度は σ，張力は T，長さは L とする．弦の中点をある強さではじいた (図１)．このとき，弦の初期速度は次の様にデルタ関数で与えられるものとする:

$$\dot{y}(0,x) = \alpha\delta(x - L/2)$$

ただし，デルタ関数 $\delta(x - x_0)$ は次の性質を満たすものとして定義される：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0)$$

その後の弦の振幅の時間発展をフーリエ級数展開を用いて調べる．以下の問に答えよ．

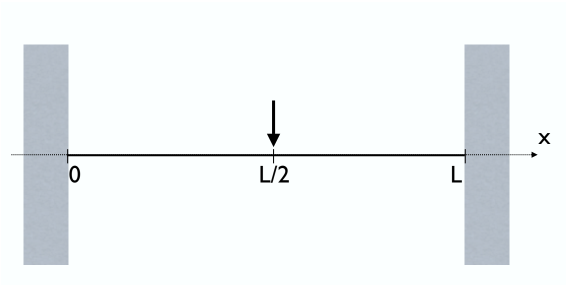

図 1: 弦の初期配位

1. 関数

$$f(x) = \begin{cases} a & (L/2 - b/2 \le x \le L/2 + b/2) \\ 0 & (\text{それ以外の } x) \end{cases}$$

について以下の問に答えよ．

   (a) $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

   (b) ab を一定に保って $a \to \infty$, $b \to 0$ の極限をとる．このとき，フーリエ級数展開の係数はどんな値に近づくか，調べよ．

   注) この極限で $f(x)$ はデルタ関数 $\delta(x - L/2)$ の定数 ab 倍に近づく．

2. 弦の振幅の時間発展をフーリエ級数展開を用いて求めよ．

3. 問１ (a) と問２の結果から，弦の振幅の時間発展はどのような振る舞いをするか，述べよ．

1. (a) $f(x)$ は固定端境界条件を満たしているので,

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] \quad (x\in[0,L])$$

とおく。このとき,

$$\begin{aligned}
b_m &= \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] f(x) \\
&= a\int_{L/2-b/2}^{L/2} dx\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] + a\int_{L/2}^{L/2+b/2} dx\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] \\
&= a\int_{L/2-b/2}^{L/2} dx\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] + a\int_{L/2}^{L/2-b/2} (-dx')\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[(L-x')\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] \\
&\quad (x'=L-x) \\
&= (1-\cos(m\pi))\, a\int_{L/2-b/2}^{L/2} dx\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] \\
&= (1-\cos(m\pi))\, a\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{L}{m\pi}\left[-\cos\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right]\right]_{L/2-b/2}^{L/2} \\
&= (1-\cos(m\pi))\, a\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{L}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}-\frac{m\pi b}{2L}\right) \\
&= (1-\cos(m\pi))\, a\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{L}{m\pi}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi b}{2L}\right) \\
&= \begin{cases} (-1)^{n+1}\, 2\, a\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{L}{(2n-1)\pi}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi b}{2L}\right) & (m=2n-1; n=1,\cdots) \\ 0 & (m=2n; n=1,\cdots) \end{cases}
\end{aligned}$$

したがって,次を得る:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4a}{(2n-1)\pi}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi b}{2L}\right)\sin\left[x\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a}{(2n-1)\pi}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi b}{2L}\right)\cos\left[(x-L/2)\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}\right)\right]
\end{aligned}$$

(b) $a\to\infty, b\to 0\,(ab=$ 一定$)$ の極限では,

$$\frac{4a}{(2n-1)\pi}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi b}{2L}\right)\longrightarrow\frac{2ab}{L} \quad (\ n\ \text{によらない定数}\ )$$

したがって,次を得る:

$$f(x)=ab\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\cos\left[(x-L/2)\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}\right)\right]$$

2. 時刻 t，位置 x での弦の振幅を $y(t,x)$ とすると，弦の振幅の一般解は次式で与えられる:

$$y(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]\left\{a^{[m]}\cos\left(\sqrt{\frac{T}{\sigma}}\left(\frac{\pi}{L}m\right)t\right)+b^{[m]}\sin\left(\sqrt{\frac{T}{\sigma}}\left(\frac{\pi}{L}m\right)t\right)\right\}.$$

初期条件は

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]a^{[m]},\\ \alpha\delta(x-L/2) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]b^{[m]}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}\left(\frac{\pi}{L}m\right).\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}a^{[m]} &= 0,\\ b^{[m]} &= \sqrt{\frac{\sigma}{T}}\left(\frac{L}{\pi m}\right)\int_0^L dx\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]v\delta(x-L/2)\\ &= \sqrt{\frac{L}{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{T}}\left(\frac{2v}{\pi m}\right)\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}m\right)\right]\\ &= \begin{cases}\sqrt{\frac{L}{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{T}}\frac{2v}{(2n-1)\pi}(-1)^{n+1} & (m=2n-1\ (\text{奇数}))\\ 0 & (m=2n\ (\text{偶数}))\end{cases}.\end{aligned}$$

以上より，弦の振幅 $y(t,x)$ は次のように求まる:

$$y(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\sigma}{T}}\frac{2\alpha}{(2n-1)\pi}(-1)^{n+1}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{L}x\right]\sin\left(\sqrt{\frac{T}{\sigma}}\frac{(2n-1)\pi}{L}t\right).$$

3. 問 1(a) と問 2 の結果を比較すると，

$$\begin{aligned}a &\leftrightarrow \sqrt{\frac{\sigma}{T}}\alpha/2\\ \frac{b}{2} &\leftrightarrow \sqrt{\frac{T}{\sigma}}t\end{aligned}$$

の対応で，フーリエ級数展開の係数が一致することがわかる。このことから，

$$y(t,x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\sigma}{T}}\alpha/2 & (L/2-\sqrt{\frac{T}{\sigma}}t\le x\le L/2+\sqrt{\frac{T}{\sigma}}t)\\ 0 & (\text{それ以外の } x)\end{cases}$$

と表すことができる。