例題 3 (N 連成振り子の基準振動，自由端)

図１のような N-連成振り子の微小縦振動を考える．おもりの質量は M，ひもの長さは l，バネ定数は K，バネの自然長は a_0，平衡時のバネののびは a とする．また，重力加速度の大きさを g とする．

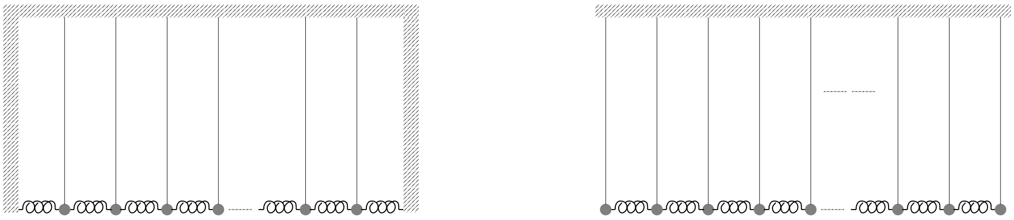

図 1: N-連成振り子．固定端（左）と自由端（右）．

1. 自由端の場合（図１右）に，基準振動数および基準振動の形を求めよ。
2. 自由端 $N = 5$ の場合に基準振動の形を図示せよ。

(解答例)

1. 固定端，自由端いずれの場合も，微小縦振動の運動方程式は次のように与えられる:

$$M\ddot{x}_n = -M\left(\frac{g}{l}\right)x_n - K(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) \quad (n = 1, 2, \cdots, N). \tag{1}$$

ただし，境界条件としては自由端条件

$$x_0(t) = x_1(t), \quad x_{N+1}(t) = x_N(t) \tag{2}$$

を満たすものとする．基準振動を求めるために，$x_n(t) = A_n \cos(\omega t + \alpha)$ とし，$A_n = a\cos[n\theta] + b\sin[n\theta]$ とおく。境界条件を一旦無視して考えると，$x_n(t)$ が運動方程式を満たすためには,

$$\omega^2 = \left(\frac{g}{l}\right) + \frac{4K}{M}\sin^2(\theta/2)$$

が成り立つ必要がある。境界条件 $x_0(t) = x_1(t)$ かつ $x_{N+1}(t) = x_N(t)$ を考慮すると,

$$\begin{aligned} a &= a\cos[\theta] + b\sin[\theta] & (3) \\ a\cos[(N+1)\theta] + b\sin[(N+1)\theta] &= a\cos[N\theta] + b\sin[N\theta] & (4) \end{aligned}$$

式 (3) より,

$$\begin{aligned} 0 &= a(1 - \cos\theta) - b\sin\theta \\ &= 2\sin[\theta/2]\{a\sin[\theta/2] - b\cos[\theta/2]\} & (5) \end{aligned}$$

式 (4) と式 (3) より，

$$\begin{aligned} 0 &= \{a(\cos[\theta]-1)+b\sin[\theta]\}\cos[N\theta]+\{-a\sin[\theta]+b(\cos[\theta]-1)\}\sin[N\theta] \\ &= -2\sin[\theta/2](a\cos[\theta/2]+b\sin[\theta/2])\sin[N\theta] \qquad (6) \end{aligned}$$

$\sin[\theta/2]\neq 0$ として，

$$a\sin[\theta/2]-b\cos[\theta/2]=0 \quad \text{かつ} \quad (a\cos[\theta/2]+b\sin[\theta/2])\sin[N\theta]=0$$

したがって

$$a=b\,\frac{\cos[\theta/2]}{\sin[\theta/2]} \quad \text{かつ} \quad \theta=\frac{\pi}{N}m \qquad (m\,\text{は任意の整数})$$

すなわち

$$\omega^2=\left(\frac{g}{l}\right)+\frac{4K}{M}\sin^2\left(\frac{\pi}{2N}m\right).$$

$$\begin{aligned} A_n &= b\frac{\cos[\theta/2]}{\sin[\theta/2]}\cos[n\theta]+b\sin[n\theta] \\ &= \frac{b}{\sin[\theta/2]}\,\cos\left[(n-1/2)\theta\right] \\ &= b'\,\cos\left[(n-1/2)\left(\frac{\pi}{N}m\right)\right]. \end{aligned}$$

ただし，この場合 $m=0$ は非自明な解になっている．また，A_n 及び ω^2 は $m\to -m$，$m\to m+2N$ の入れ替えに対して同じになるので，結局，基準振動解は $m=0,1,\cdots,N-1$ の N 個の場合を考えればよい．以上より，基準振動解は次のように与えられる:

$$x_n(t)=A_{[m]}\sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left[(n-1/2)\left(\frac{\pi}{N}m\right)\right]\,\cos(\omega_{[m]}t+\alpha_{[m]}) \qquad (7)$$

$$\omega_{[m]}^2=\left(\frac{g}{l}\right)+\frac{4K}{M}\sin^2\left(\frac{\pi}{N}m\right) \qquad (m=0,1,\cdots,N-1) \qquad (8)$$

(ただし，$m=0$ の時は，規格化因子 $\sqrt{\frac{2}{N}}$ を $\sqrt{\frac{1}{N}}$ とする.)

注) $\sin[\theta/2]=0$ のとき，$\theta=2\pi m'$ (m'は任意の整数). このとき，$A_n=a, \omega^2=g/l$ となるから，これは $m=0$ の解と一致している。

2. 自由端 N=5 の場合の基準振動の形：

$$\omega_{[m]}^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M}\sin^2\left(\frac{\pi}{10}m\right) \quad (m = 0, 1, 2, 3, 4)$$

$$e_n^{[m]} = \sqrt{\frac{2}{5}}\cos\left[(n - 1/2)\left(\frac{\pi}{5}m\right)\right] \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5)$$

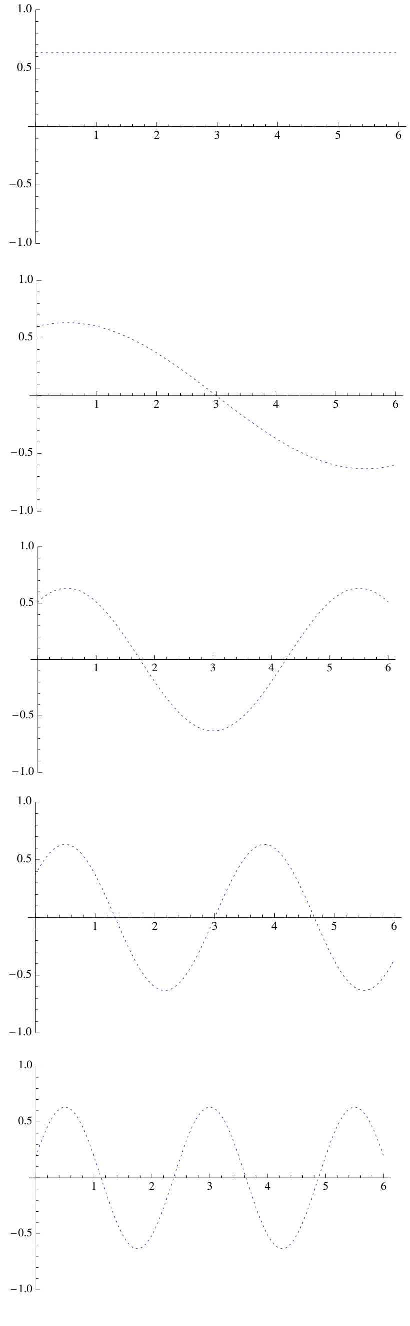

図 2: N=5