

例題 2+ (3 連成振子の基準座標)

例題 2 の 3 連成振子の基準振動について，各基準振動の振幅の比を次の様に 3 次元ベクトルで表す：

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{[1]} &\equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} ; & \omega_{[1]}^2 &= \frac{(2 - \sqrt{2})k}{m} \\ \mathbf{e}^{[2]} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; & \omega_{[2]}^2 &= \frac{2k}{m} \\ \mathbf{e}^{[3]} &\equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} ; & \omega_{[3]}^2 &= \frac{(2 + \sqrt{2})k}{m} \end{aligned}$$

以下の問に答えよ。

1. $\mathbf{e}^{[1]}, \mathbf{e}^{[2]}, \mathbf{e}^{[3]}$ は互いに直交することを確認めよ。
2. この 3 連成振子の基準座標 $Q_{[1]}(t), Q_{[2]}(t), Q_{[3]}(t)$ を求めよ。
3. この 3 連成振子のエネルギー E を基準座標で表せ。
4. 基準振動数 $\omega_{[1]}^2, \omega_{[2]}^2, \omega_{[3]}^2$ および基準振動の振幅比のベクトル $\mathbf{e}^{[1]}, \mathbf{e}^{[2]}, \mathbf{e}^{[3]}$ の成分が，次の公式で与えられることを確認めよ。

$$\begin{aligned} \omega_{[i]}^2 &= \frac{4k}{m} \sin^2 \left(\frac{\pi i}{8} \right) \quad (i = 1, 2, 3) \\ e_n^{[i]} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left[n \left(\frac{\pi i}{4} \right) \right] \quad (i = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

(解答例)

1. 省略

2. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすれば, 一般解は基準振動の重ね合わせとして, 次のように表すことができる:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{e}^{[1]} A_{[1]} \cos(\omega_{[1]}t + \alpha_{[1]}) + \boldsymbol{e}^{[2]} A_{[2]} \cos(\omega_{[2]}t + \alpha_{[2]}) + \boldsymbol{e}^{[3]} A_{[3]} \cos(\omega_{[3]}t + \alpha_{[3]})$$

ここで,

$$Q_{[i]}(t) \equiv \boldsymbol{e}^{[i]} \cdot \boldsymbol{x}(t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

とすれば, $\boldsymbol{e}^{[1]}, \boldsymbol{e}^{[2]}, \boldsymbol{e}^{[3]}$ の直交性より,

$$Q_{[i]}(t) = A_{[i]} \cos(\omega_{[i]}t + \alpha_{[i]}) \quad (i = 1, 2, 3)$$

となり, 基準振動数で単振動することがわかる。したがって, $Q_{[i]}(t)$ ($i = 1, 2, 3$) が基準座標を与えることがわかる。すなわち, 基準座標は次で与えられる:

$$\begin{aligned} Q_{[1]}(t) &= \frac{x_1(t) + \sqrt{2}x_2(t) + x_3(t)}{2} \\ Q_{[2]}(t) &= \frac{x_1(t) - x_3(t)}{\sqrt{2}} \\ Q_{[3]}(t) &= \frac{x_1(t) - \sqrt{2}x_2(t) + x_3(t)}{2} \end{aligned}$$

(注)

$Q_{[i]}(t) \equiv \boldsymbol{e}^{[i]} \cdot \boldsymbol{x}(t)$ ($i = 1, 2, 3$) が単振動の方程式に従うことは, 次の様にして, 運動方程式から直接確かめることができる:

$$\hat{K} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}$$

とおけば, 運動方程式は

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\hat{K}\boldsymbol{x}$$

と表すことができる。一方, $Q_{[i]}(t)$ ($i = 1, 2, 3$) の定義から, 座標 $\boldsymbol{x}(t)$ は,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{e}^{[1]} Q_{[1]}(t) + \boldsymbol{e}^{[2]} Q_{[2]}(t) + \boldsymbol{e}^{[3]} Q_{[3]}(t)$$

と表すことができるから,

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{e}^{[1]} \ddot{Q}_{[1]}(t) + \boldsymbol{e}^{[2]} \ddot{Q}_{[2]}(t) + \boldsymbol{e}^{[3]} \ddot{Q}_{[3]}(t)$$

$$\hat{K}\boldsymbol{x}(t) = \hat{K} \{ \boldsymbol{e}^{[1]} Q_{[1]}(t) + \boldsymbol{e}^{[2]} Q_{[2]}(t) + \boldsymbol{e}^{[3]} Q_{[3]}(t) \}$$

となる。これらの表式を運動方程式に代入すると

$$e^{[1]}\ddot{Q}_{[1]}(t) + e^{[2]}\ddot{Q}_{[2]}(t) + e^{[3]}\ddot{Q}_{[3]}(t) = -\hat{K} \{e^{[1]}Q_{[1]}(t) + e^{[2]}Q_{[2]}(t) + e^{[3]}Q_{[3]}(t)\}$$

が成り立つ。

ところが、基準振動数と基準振動の振幅比のベクトルは、固有値方程式

$$\hat{K}e^{[i]} = \omega_{[i]}^2 e^{[i]} \quad (i = 1, 2, 3)$$

を満たすべきことから、運動方程式は

$$e^{[1]}\ddot{Q}_{[1]}(t) + e^{[2]}\ddot{Q}_{[2]}(t) + e^{[3]}\ddot{Q}_{[3]}(t) = -e^{[1]}\omega_{[1]}^2 Q_{[1]}(t) - e^{[2]}\omega_{[2]}^2 Q_{[2]}(t) - e^{[3]}\omega_{[3]}^2 Q_{[3]}(t)$$

となる。 $e^{[1]}$, $e^{[2]}$, $e^{[3]}$ は互いに線形独立であるから、各 $i = 1, 2, 3$ について

$$\ddot{Q}_{[i]}(t) = -\omega_{[i]}^2 Q_{[i]}(t)$$

が成り立つ。したがって、基準座標は単振動の運動方程式に従う。

3. この系のエネルギー E は次のように表すことができる：

$$E = \frac{1}{2}m \left\{ \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \hat{K} \mathbf{x} \right\}$$

これに

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = e^{[1]}\dot{Q}_{[1]}(t) + e^{[2]}\dot{Q}_{[2]}(t) + e^{[3]}\dot{Q}_{[3]}(t)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}\mathbf{x}(t) &= \hat{K} \{e^{[1]}Q_{[1]}(t) + e^{[2]}Q_{[2]}(t) + e^{[3]}Q_{[3]}(t)\} \\ &= e^{[1]}\omega_{[1]}^2 Q_{[1]}(t) + e^{[2]}\omega_{[2]}^2 Q_{[2]}(t) + e^{[3]}\omega_{[3]}^2 Q_{[3]}(t) \end{aligned}$$

の表式を代入すれば、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m \left\{ \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \hat{K} \mathbf{x} \right\} \\ &= \frac{1}{2}m \left\{ \dot{Q}_{[1]}^2 + \dot{Q}_{[2]}^2 + \dot{Q}_{[3]}^2 + \omega_{[1]}^2 Q_{[1]}^2 + \omega_{[2]}^2 Q_{[2]}^2 + \omega_{[3]}^2 Q_{[3]}^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2}m \left\{ \dot{Q}_{[i]}^2 + \omega_{[i]}^2 Q_{[i]}^2 \right\} \end{aligned}$$

となる。

4. 省略