

例題 1 (単振り子の微小振動)

おもりの質量 m , ひもの長さ l の単振り子の運動を記述する運動方程式を求めよ . ただし , 重力加速度の大きさを g とする . また , 微小振動の場合 , 運動方程式は単振動の方程式に帰着することを示し , 単振動の周期を求めよ .

(解答例)

鉛直下向きからのひもの振れ角を θ とする . ひもの張力を T とすれば , 運動方程式は

$$\begin{aligned} -ml\dot{\theta}^2 &= -T + mg \cos \theta & (\text{動径方向}) \\ ml\ddot{\theta} &= -mg \sin \theta & (\text{角度方向}) \end{aligned}$$

$|\theta| \ll 1$ として , 正弦関数 $\sin \theta$ を テイラー (Taylor) 展開すれば

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots$$

したがって , 角度方向の運動方程式は次のように近似できる .

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta$$

すなわち

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta \quad \left(\omega_0^2 = \frac{g}{l} \right)$$

これは単振動の方程式である . この単振動の周期 T_0 は

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

(注 1) 単振り子の運動は角度方向の方程式によって決まる . 動径方向の方程式は , このときのひもの張力 T をあたえる式とみなすことができる .)

(注 2) 重力の位置エネルギーは , 単振り子が静止している状態を基準にすると ,

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$$

$\theta = 0$ は , 安定な平衡点 ($V'(0) = 0$, $V''(0) > 0$) になっている .

$|\theta| \ll 1$ として , 余弦関数 $\cos \theta$ を テイラー (Taylor) 展開すれば

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots$$

したがって , $V(\theta)$ は

$$V(\theta) = mgl \left(\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots \right)$$

(参考) 単振り子の周期 (非線形項と等時性の破れ)

$$T = T_0 \left(\frac{2}{\pi} \right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2) \sin^2 \phi}}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

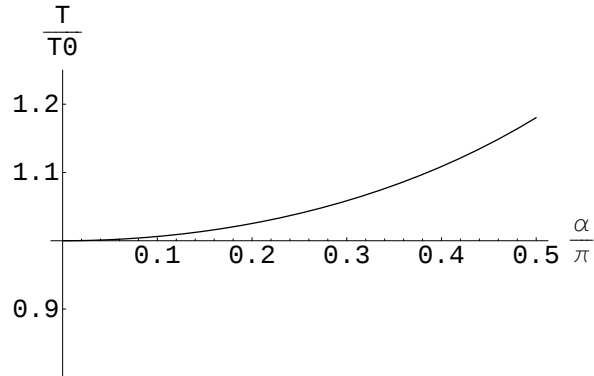


図 1: 単振り子の周期の振幅依存性

(メモ) 単振り子の運動方程式の積分

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

両辺に $\dot{\theta}$ をかけて,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{l} \cos \theta \right\} = 0$$

$t = 0$ で $\theta = \alpha, \dot{\theta} = 0$ として積分すると

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{l} \cos \theta = -\frac{g}{l} \cos \alpha$$

これより

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\theta/2)}}$$

周期は

$$\begin{aligned} T &= 4 \times \int_0^\alpha \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\theta/2)}} \\ &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2) \sin^2 \phi}} \end{aligned}$$

ただし, 最後の等号において, $\sin(\theta/2) = \sin(\alpha/2) \cos \phi$ ($\phi \in [0, \pi/2]$) と変数変換した.