例題 1+ (フックの法則に従うバネによる，２次元平面上の微小振動)

摩擦のない水平な台の上で，質量 m のおもりと，2 本の等しいバネ (バネ定数 k) が一直線に固定されている。(図１)　2 本のバネは自然長 l_0 よりも十分長く引き延ばされており，長さ l になっているものとする。平衡位置からのおもりの水平変位を表すために，バネと平行な方向に x 軸，垂直な方向に y 軸をとる。変位 x, y が微小であるとして，おもりの運動方程式を求めよ。x 方向，y 方向の微小振動の振動数をそれぞれ ω_x，ω_y とするとき，それらの比 ω_x/ω_y を求めよ。

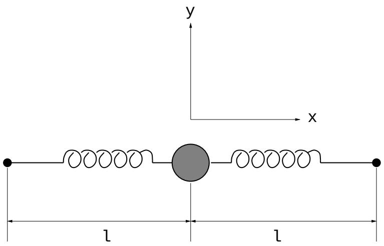

図 1: 摩擦のない水平な台の上のおもりとバネ

(解答例)

おもりの変位が $x, y = 0$ (縦振動) のとき，運動方程式は

$$m\ddot{x} = -2kx.$$

おもりの変位が $x = 0, y$ (横振動) のとき，運動方程式は

$$m\ddot{y} = -2k\left(\sqrt{l^2+y^2} - l_0\right)\frac{y}{\sqrt{l^2+y^2}} = -2k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2+y^2}}\right)y.$$

右辺を y の１次まででで近似すると

$$m\ddot{y}(t) \simeq -2k(1 - l_0/l)y.$$

これより

$$\omega_x = \sqrt{2k/m}, \quad \omega_y = \sqrt{2k(1-l_0/l)/m}, \qquad \therefore\ \omega_x/\omega_y = \sqrt{1/(1-l_0/l)}.$$

一般におもりの変位が x, y であるとき，左右のバネののびはそれぞれ $\sqrt{(l+x)^2+y^2} - l_0$, $\sqrt{(l-x)^2+y^2} - l_0$. したがって，運動方程式は

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}(t) &= -k\left(\sqrt{(l+x)^2+y^2} - l_0\right)\frac{l+x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}} \\
&\quad +k\left(\sqrt{(l-x)^2+y^2} - l_0\right)\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}. \\
m\ddot{y}(t) &= -k\left(\sqrt{(l+x)^2+y^2} - l_0\right)\frac{y}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}} \\
&\quad -k\left(\sqrt{(l-x)^2+y^2} - l_0\right)\frac{y}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

右辺を x, y の１次までで近似すると

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &\simeq -2kx. \\ m\ddot{y}(t) &\simeq -2k(1-l_0/l)y. \end{aligned}$$

(注) $l=l_0$ のとき，x, y の１次までで近似すると y 方向の力はゼロになる．このとき，y 方向の力は x, y について３次以上の関数になっており，y 方向の微小運動は単振動にならない．

実際，バネの位置 (ポテンシャル) エネルギーは

$$V(x,y)=\frac{k}{2}\left(\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l_0\right)^2+\frac{k}{2}\left(\sqrt{(l-x)^2+y^2}-l_0\right)^2$$

となり，$V(x,y)$ は $x=y=0$ のときに最低値をとり， $x=y=0$ の周りで次のように Taylor 展開される:

$$\begin{aligned} V(x,y) &= k\left[(l-l_0)^2+x^2+y^2-l_0\Big(\sqrt{(l+x)^2+y^2}+\sqrt{(l-x)^2+y^2}-2l\Big)\right] \\ &= k\left[(l-l_0)^2+x^2+(1-l_0/l)y^2-(l_0/l^3)x^2y^2+\frac{1}{4}(l_0/l^3)y^4+\cdots\right] \end{aligned}$$

x, y 方向の力はそれぞれ

$$F_x=-\frac{\partial}{\partial x}V(x,y), \quad F_y=-\frac{\partial}{\partial y}V(x,y)$$

と与えられるから，次を得る:

$$\begin{aligned} F_x &= -2kx-2k(l_0/l^3)xy^2+\cdots, \\ F_y &= -2k(1-l_0/l)y-2k(l_0/l^3)x^2y+k(l_0/l^3)y^3+\cdots. \end{aligned}$$