例題 12+ (連成振り子と外力)

おもりの質量 M，ひもの長さ l の振り子が，バネ定数 K，自然長 a_0 のバネを用いて直線状に等間隔 a_0 で連結された連成振子の微小な縦振動を考える．(図 1) ただし，バネの質量は無視できるものとする．左端のおもり (n=1) は固定端または自由端いずれかの境界条件をみたしており，右端のおもり (n=3) は自由端である． 振り子には速度に比例する抵抗力がはたらき，その比例係数を $-2M\gamma$ $(\gamma > 0)$ とする．また，重力加速度の大きさを g として，$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ とする．

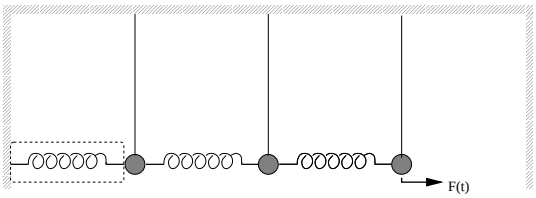

図 1: 連成振子と外力

1 つのおもりに周期的な外力 $F(t) = Mf\cos(\omega t)$ を作用させ，外力の仕事率の，1 周期 $T = 2\pi/\omega$ にわたる平均値 P を測定する．この平均仕事率 P を $(Mf^2/2\omega_0)$ で規格化し，ω/ω_0 の関数としてプロットしたものが図 2 ある．左図は右端のおもり (n=3) の場合，右図は中央のおもり (n=2) の場合にそれぞれ対応する．以下の問に答えよ．

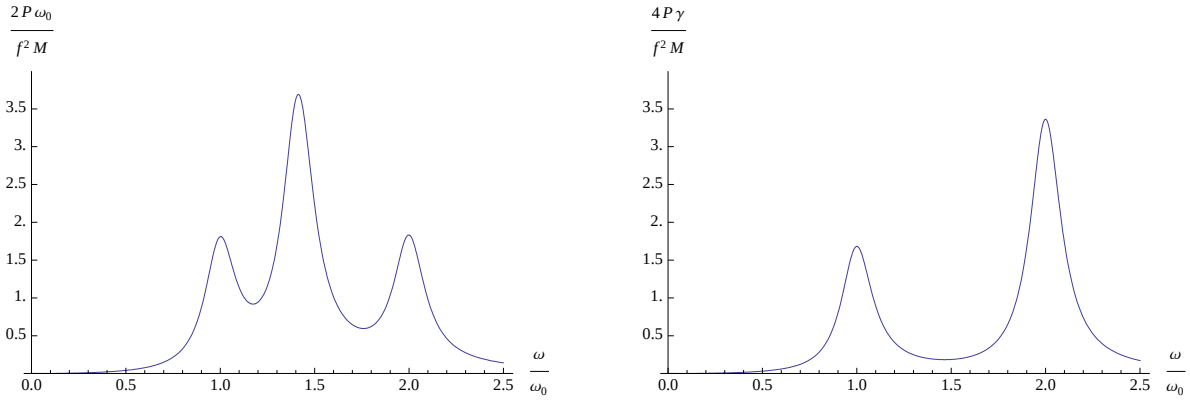

図 2: おもりに外力を作用させた場合の平均仕事率 P．n=3 (左図)．n=2(右図)．

1. 左端のおもり (n=1) は固定端と自由端のどちらの境界条件をみたしていると考えられるか．理由も述べよ．

2. 中央のおもり (n=2) に外力を作用させた場合 (図 2 右)，共鳴の数がひとつ少なくなっている．この理由を述べよ．

3. $\sqrt{\frac{K}{M}}/\omega_0$ の値はいくらと考えられるか．

4. 右端のおもり (n=3) に外力を作用させた場合 (図 2 左)，3 つの共鳴の Q 値を，共鳴振動数の小さいものから，Q_1, Q_2, Q_3 とする．比 $Q_1 : Q_2 : Q_3$ をもとめよ．

(解答例)

系の運動方程式は

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + 2\gamma \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \frac{g}{l} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \frac{K}{M} \begin{pmatrix} 1+b & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \cos(\omega t)$$

となる。ここで b は $n = 1$ のおもりの境界条件の違いを表すために導入したパラメータで，自由端の時 $b = 0$，固定端のとき $b = 1$ とする。また，外力 (f_1, f_2, f_3) は $n = 2$ に作用する場合には $f_2 = f,\ f_1 = f_3 = 0$ であり，$n = 3$ に作用する場合は $f_3 = f,\ f_1 = f_2 = 0$ とする。

外力と抵抗力が作用しない場合の系の基準振動数を $\omega_{[m]}(m = 0, 1, 2)$, 基準振動の形を表す３次元単位ベクトルを $\boldsymbol{e}^{[m]}(m = 0, 1, 2)$ とする。基準座標を用いて，$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{e}^{[0]}Q_{[0]}(t) + \boldsymbol{e}^{[1]}Q_{[1]}(t) + \boldsymbol{e}^{[2]}Q_{[2]}(t)$ とおけば，運動方程式は

$$\sum_{m=0,1,2} \boldsymbol{e}^{[m]} \left\{ \ddot{Q}_{[m]} + 2\gamma \dot{Q}_{[m]} + \omega_{[m]}^2 Q_{[m]} \right\} = \boldsymbol{f}\ \cos(\omega t)$$

と表される。$\boldsymbol{e}^{[m]}(m = 0, 1, 2)$ の直交性より，各基準座標に対して，次が成り立つ：

$$\ddot{Q}_{[m]} + 2\gamma \dot{Q}_{[m]} + \omega_{[m]}^2 Q_{[m]} = \boldsymbol{e}^{[m]} \cdot \boldsymbol{f}\ \cos(\omega t)$$

1. 自由端。

   共鳴の起こる振動数は，図２より $\omega = 1.0 \times \omega_0, 1.4.. \times \omega_0, 2.0 \times \omega_0$ と読み取ることができる。これらは３連成振り子の３つの基準振動数であると考えられる。ところが，$\omega_0 = \sqrt{g/l}$ は振り子の振動数であって，これが基準振動となるためには，バネが伸び縮みしないような固有振動がなければならない。これが可能なのは自由端の場合である。

2. $n = 1$ のおもりの境界条件が自由端のとき，系の基準振動は以下の通り (例題３の N=3 の場合を参照のこと)：

$$\omega_{[m]}^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M} \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} m \right) \quad (m = 0, 1, 2)$$

$$e_n^{[m]} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \left[(n - 1/2) \left(\frac{\pi}{3} m \right) \right] \quad (m = 0, 1, 2)$$

すなわち

$$\boldsymbol{e}^{[0]} \equiv \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \qquad \omega_{[0]}^2 = \frac{g}{l}$$

$$\boldsymbol{e}^{[1]} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \qquad \omega_{[1]}^2 = \frac{g}{l} + \frac{K}{M}$$

$$\boldsymbol{e}^{[2]} \equiv \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \qquad \omega_{[2]}^2 = \frac{g}{l} + \frac{3K}{M}$$

今，$n = 2$ の重りに外力を作用させた場合を考えると，$\boldsymbol{f} = (0, f, 0)$ となるから，$\boldsymbol{e}^{[0]} \cdot \boldsymbol{f} = \sqrt{\frac{1}{3}} f$, $\boldsymbol{e}^{[1]} \cdot \boldsymbol{f} = 0$, $\boldsymbol{e}^{[2]} \cdot \boldsymbol{f} = -\sqrt{\frac{2}{3}} f$ となり，$m = 1$ の基準振動には外力が作用しないことがわかる。$m = 1$ の基準振動は共鳴を示さないから，ピークは二つしか観測されないことになる。

3. $K/M = g/l$ であれば，$\omega_{[1]}/\omega_{[0]} = \sqrt{2}$, $\omega_{[2]}/\omega_{[0]} = 2$ となり，図 2 から読み取れる振動数の関係，$\omega = 1.0 \times \omega_0, 1.4.. \times \omega_0, 2.0 \times \omega_0$ とマッチする。特に，$\omega_{[2]}/\omega_{[0]} = 2$ の関係が再現される。従って，$K/M = g/l$。

4.

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 = \frac{\omega_{[0]}}{2\gamma} : \frac{\omega_{[1]}}{2\gamma} : \frac{\omega_{[2]}}{2\gamma} = 1 : \sqrt{2} : 2$$