

まとめ 11. (斉次, 非斉次) 2 階線形微分方程式の解法

非斉次-2 階線形微分方程式：

速度に比例する抵抗力と時間に依存する外力が作用する調和振動子系の運動方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad f(t) = \sum_{i=1}^N f_i \cos(\omega_i t)$$

線形性： $x_1(t)$ が外力 $f_1(t)$ の下での解， $x_2(t)$ が外力 $f_2(t)$ の下での解のとき，
 $x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$ は外力 $a f_1(t) + b f_2(t)$ の下での解になる．

解： $z(t) \in \mathbb{C}$ として

$$x(t) = \operatorname{Re}\{z(t)\}$$

ただし，

$$z(t) = c_0 e^{\lambda t} + \sum_{i=1}^N c_i e^{i\omega_i t}$$

ここで， $c_0 \in \mathbb{C}$ は積分定数． $\lambda \in \mathbb{C}$ 及び $c_i \in \mathbb{C}$ は次の方程式の解：

$$\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$(-\omega_i^2 + 2i\gamma \omega_i + \omega_0^2)c_i = f_i$$

(注 1) $\gamma = \omega_0$ の場合， λ は重根になり， 独立な解が 1 つだけ求まる． もう 1 つの独立な解は， 例えば， 係数変化法や $\gamma \rightarrow \omega_0$ の極限をとることで求めることができる．

(注 2) $\gamma = 0$, $\omega_i = \omega_0$ の場合， 上記の方法では解が求まらない． この場合も， 例えば， 係数変化法や $\omega_i \rightarrow \omega_0$ の極限をとることで求めることができる．