問題 11-1 (複素指数関数の積，微分)

$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ とする．複素指数関数の積および微分について，次の公式が成り立つことを示せ．

$$\mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$$
$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z}$$

問題 11-2 (複素変数を用いた微分方程式の解法)

次の微分方程式の 3 つの独立な解を求めよ。

$$\frac{d^3}{dt^3}f(t) + f(t) = 0$$

問題 11-3 (双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ と複素変数)

双曲線関数

$$\cosh x \equiv \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \sinh x \equiv \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

は，指数関数 e^{x} $(x \in \mathbb{R})$ を複素指数関数 e^{z} $(z \in \mathbb{C})$ に拡張することによって，複素変数に拡張することができる．オイラーの公式を用いて，次の関係式が成り立つことを示せ．ただし，$\theta, \nu \in \mathbb{R}$.

$$\cosh(i\theta) = \cos(\theta), \qquad \sinh(i\theta) = i\sin(\theta)$$

$$\cos(i\nu) = \cosh(\nu), \qquad \sin(i\nu) = i\sinh(\nu)$$

問題 11-4 (過減衰)

過減衰の場合，初期条件をどのように設定しても，平衡の位置 $x = 0$ を横切ることができるのは一度きりであることを示せ。

問題 11-5 (空気抵抗のある場合の振り子の微小運動)

空気抵抗のある場合の振り子の微小運動を考える。初期位置 $x(0) = 0$，初速度 $\dot{x}(0) = v_0$ で振り子が動きだすときの運動を，$\omega_0 > \gamma$，$\omega_0 < \gamma$，$\omega_0 = \gamma$ の 3 通りの場合に図示せよ。