量子論
演習 I-1 (量子力学に現れる物理定数、単位)

1. 量子力学に現れる基本的な物理定数、物理量として $\hbar$(Plank 定数)、c(光速)、m(電子質量)、e(素電荷) の 4 つをあげることができる。

$$\hbar = 1.055 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} \tag{1}$$

$$c = 2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}} \tag{2}$$

$$m = 9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \tag{3}$$

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \tag{4}$$

   (a) Plank 定数が角運動量の次元を持つことを説明せよ。
   (b) $\hbar$、c、m をもちいて次の物理量と同じ次元をもつ量を構成せよ。
      i. 運動量
      ii. エネルギー
      iii. 角運動量
      iv. 時間
      v. 距離

2. 原子物理学ではエネルギーの単位として eV (エレクトロンボルト)

$$1\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{J} \tag{5}$$

長さの単位としてÅ(オングストローム)

$$1\text{Å} = 10^{-8}\mathrm{cm} = 10^{-10}\mathrm{m} \tag{6}$$

を用いる。これらの単位を用いたときプランク定数 × 光速の値はいくらになるか。hc (eVÅ) 及び $\hbar c$ (eVÅ) を計算せよ。

電子の静止質量の値はいくらになるか。mc^2 (eV) を計算せよ。

$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ が無次元量であることを説明せよ。$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ の値を計算せよ。

(注 1) 数値計算には電卓を用いてよろしい。

(注 2) 真空の誘電率は

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987 \times 10^{9}\ \mathrm{N\,m^2}/\mathrm{C^2} \tag{7}$$

で与えられる。

(注 3) $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ は自然単位系 ($\hbar = 1, c = 1$) において電磁相互作用の強さを表す結合定数とみなすことができる。この定数は微細構造定数と呼ばれていて、α と記す。

解答例

1. (a) プランク定数の単位 Js は (エネルギー)×(時間) の次元をもつ。エネルギーの次元をもつ量として運動エネルギー $E = \frac{1}{2}mv^2$ を考えればわかるように、エネルギーの次元は次のように分解できる:

$$(\text{エネルギー}) = \left[mv^2\right] = [mv] \times [v] = (\text{運動量}) \times (\text{距離})/(\text{時間}) \tag{8}$$

これより

$$[\hbar] = (\text{エネルギー}) \times (\text{時間}) = (\text{運動量}) \times (\text{距離}) = (\text{角運動量}) \tag{9}$$

したがってプランク定数は角運動量の次元をもつことがわかる。

(b) i. $mc = [\text{運動量}]$

ii. $mc^2 = [\text{エネルギー}]$

iii. $\hbar = [\text{角運動量}]$

iv. $\frac{\hbar}{mc^2} = [\text{時間}]$

v. $\frac{\hbar}{mc} = [\text{距離}]$

(注)

$$\lambda_e = \frac{h}{mc} = 2\pi\frac{\hbar}{mc} \tag{10}$$

を電子の Compton 波長とよぶ。

2.

$$\begin{aligned} hc &= 12400 \text{ eV Å} && (11)\\ \hbar c &= 1.973 \times 10^3 \text{ eV Å} && (12)\\ mc^2 &= 0.5110 \times 10^6 \text{ eV} && (13) \end{aligned}$$

クーロンポテンシャルエネルギー V は

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{14}$$

で与えられるから

$$\left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right] = (\text{エネルギー}) \times (\text{距離}) \tag{15}$$

これは $\hbar c$ の次元と同じであるから

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \tag{16}$$

は無次元量である。値を計算すると

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.0} \tag{17}$$