例題５ (弦の振動とフーリエ級数展開)

弦が両端を固定して張られている。弦の線密度は σ，張力は T，長さは L とする。弦の中点を長さ A だけ静かに引っ張り (図１)，その後，静かに放した．その後の弦の振幅の時間発展を フーリエ級数展開を用いて求めよ．

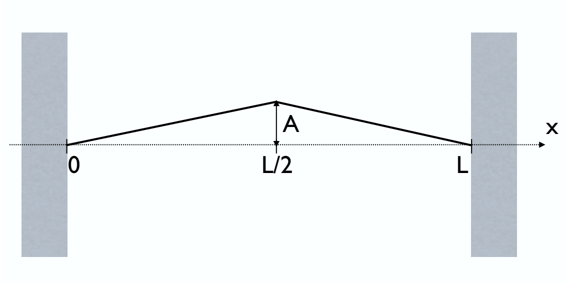

図 1: 弦の初期配位

(解答例)

図１で与えられる弦の初期配位を $f(x)$ とすれば,

$$f(x) = \begin{cases} 2A(x/L) & 0 \le x \le L/2 \\ 2A(1-x/L) & L/2 \le x \le L \end{cases} .$$

時刻 t，位置 x での弦の振幅を $y(t,x)$ とすると，弦の振幅の一般解は次式で与えられる:

$$y(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right] \left\{a_{[m]} \cos\left(\sqrt{\frac{T}{\sigma}}\left(\frac{\pi}{L}m\right)t\right) + b_{[m]} \sin\left(\sqrt{\frac{T}{\sigma}}\left(\frac{\pi}{L}m\right)t\right)\right\}.$$

初期条件は

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right] a_{[m]}, \\ 0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right] b_{[m]} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}\left(\frac{\pi}{L}m\right). \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} a_{[m]} &= \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right] f(x), \\ b_{[m]} &= 0. \end{aligned}$$

$a_{[m]}$ の計算は以下の通り:

$$a_{[m]} = \int_0^{L/2} dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right] 2A(x/L) + \int_{L/2}^{L} dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right] 2A(1-x/L)$$

$x' = L - x$ とすれば，右辺第２項は

$$
\begin{aligned}
(\text{第２項}) &= +\int_0^{L/2} dx' \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[m\pi - \left(\frac{\pi}{L}m\right)x'\right] 2A(x'/L) \\
&= -\cos(m\pi) \int_0^{L/2} dx' \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x'\right] 2A(x'/L)
\end{aligned}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
a_{[m]} &= [1-\cos(m\pi)] \int_0^{L/2} dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right] 2A(x/L) \\
&= [1-\cos(m\pi)]\sqrt{\frac{2}{L}}(2A/L) \times \\
&\quad \left\{\left[x(-L/(\pi m))\cos\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]\right]_0^{L/2} + (L/(\pi m))\int_0^{L/2} dx\, \cos\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]\right\} \\
&= [1-\cos(m\pi)]\sqrt{\frac{2}{L}}(2A/L) \times \\
&\quad \left\{\left[x(-L/(\pi m))\cos\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]\right]_0^{L/2} + (L/(\pi m))^2\left[\sin\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]\right]_0^{L/2}\right\} \\
&= [1-\cos(m\pi)]\frac{4A}{(\pi m)^2}\sqrt{\frac{L}{2}}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \\
&= \begin{cases} \sqrt{\frac{L}{2}}\frac{8A}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1} & (m = 2n-1\ (\text{奇数})) \\ 0 & (m = 2n\ (\text{偶数})) \end{cases}.
\end{aligned}
$$

以上より，弦の振幅 $y(t,x)$ は次のように求まる:

$$
y(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8A}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1} \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{L}x\right] \cos\left(\sqrt{\frac{T}{\sigma}}\frac{(2n-1)\pi}{L}t\right).
$$

$\xi = x/L$, $\tau = t/T_0$ とおく．ただし $T_0 = 2L\sqrt{\frac{\sigma}{T}}$ (m=1(n=1) のモードの周期).

$$
\xi(\tau,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8A}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1} \sin[(2n-1)\pi\xi] \cos[2(2n-1)\pi\tau].
$$

弦の初期配位 ($\tau = 0$) のフーリエ級数展開

$$y(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8A}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\,\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{L}x\right].$$

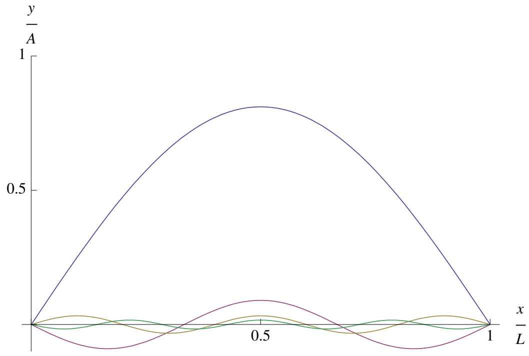

図 2: m=1,3,5,7 (n=1,2,3,4) の基準振動の寄与

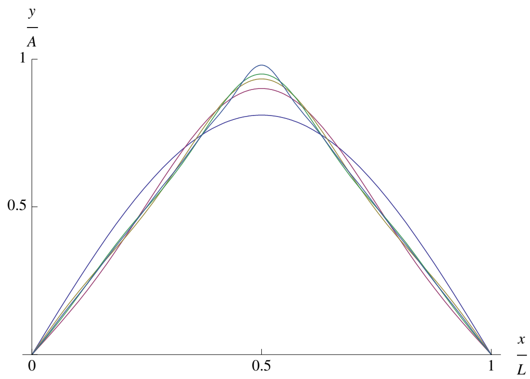

図 3: m=1,3,5,7 (n=1,2,3,4) および m=19(n=10) までの基準振動の和

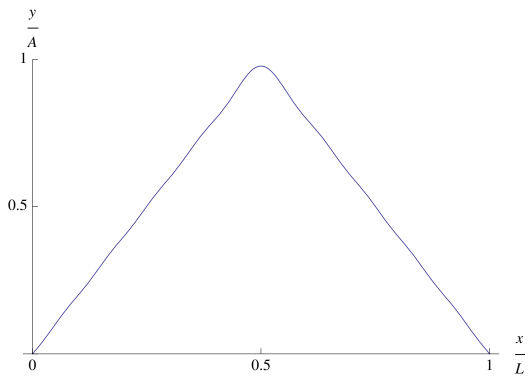

図 4: 弦の初期配位．m=19 までの基準振動の和による．

弦の振動 (半周期 $T_0/2$)