

まとめ 4. 弦の振動，波動方程式の導出，基準振動解

弦の振動の記述：

張力 T で長さ L に張られた，線密度 σ の弦を考える．

位置 $x \in [0, L]$ における横振動の振幅を $y(t, x)$ とする．

$y(t, x)$ の時間変化を与える方程式：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t, x) = \frac{T}{\sigma} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t, x) \quad [\text{波動方程式}] \quad (1)$$

境界条件：

$$y(t, 0) = 0, \quad y(t, L) = 0 \quad (\text{固定端})$$

1. 幅 Δx の質量素片の横微小振動の運動方程式：

位置 $x \in [0, L]$ における弦の傾き：

$$\theta(x) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) \quad \left[\theta(x) \simeq \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} \right]$$

質量素片の運動方程式：

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t, x) &= \frac{T}{(\sigma \Delta x)} (\theta(x + \Delta x) - \theta(x)) \\ \left[\ddot{y}(t, x) \simeq \frac{T}{(\sigma (\Delta x)^2)} (y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x) - 2y(x)) \right] \end{aligned}$$

2. N 連成振子の横微小振動の運動方程式：

$$\ddot{y}_n(t) = \frac{K(1 - a_0/a)}{M} (y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n)$$

$M/a = \sigma$, $K(a - a_0) = T$, $(N + 1)a = L$ を一定として $N \rightarrow \infty$ の極限をとれば，式 (1) に帰着．ただし，おもりの位置は $x = na$ ．

弦のエネルギー：

$$\begin{aligned} E &\simeq \sum_{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma \Delta x) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \frac{T}{\Delta x} (y(x + \Delta x) - y(x))^2 \right\} \\ &= \int_0^L dx \frac{1}{2} \sigma \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{\sigma} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

弦の基準振動：

$$\begin{aligned}y(t, x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\left(\frac{\pi}{L} m \right) x \right] A_{[m]} \cos(\omega_{[m]} t + \alpha_{[m]}) \\&= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\left(\frac{\pi}{L} m \right) x \right] \{ a_{[m]} \cos(\omega_{[m]} t) + b_{[m]} \sin(\omega_{[m]} t) \}\end{aligned}$$

ただし,

$$\omega_{[m]}^2 = \frac{T}{\sigma} \left(\frac{\pi}{L} m \right)^2 \quad (m = 1, 2, \dots, \infty)$$

解法

$$y(t, x) = [a \cos(kx) + b \sin(kx)] \cos(\omega t + \alpha) \quad (3)$$

とおく (この解の形は並進対称性を満たしていることに注意).

(3) を波動方程式 (1) に代入すると

$$\omega^2 = \frac{T}{\sigma} k^2$$

$y(t, 0) = 0, \quad y(t, L) = 0$ より

$$a = 0$$

$$[a \cos(kL) + b \sin(kL)] = 0$$

$$\therefore a = 0, \quad k = \frac{\pi}{L} m \quad (m = 1, 2, \dots, \infty)$$

※) $m = 0$ は自明な解. m が負の整数の場合は, 正の整数 $m' = -m$ の解に帰着する.

分散関係：

- k : 波数 (角波数) 基準振動の波形を決める. ($\lambda = \frac{2\pi}{k}$: 波長)
- $\omega = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} k$: 基準振動数は波数で決まる. この関係 $\omega = \omega(k)$ を**分散関係**という.
- 分散関係は波動関数の形に応じて決まる.

一般解：

$$y(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\left(\frac{\pi}{L} m \right) x \right] \{ a_{[m]} \cos(\omega_{[m]} t) + b_{[m]} \sin(\omega_{[m]} t) \}$$

初期条件：

$$\begin{aligned} y(0, x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\left(\frac{\pi}{L} m \right) x \right] a_{[m]} \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0, x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\left(\frac{\pi}{L} m \right) x \right] b_{[m]} \omega_{[m]} \end{aligned}$$

基準振動解の構造：

$$e^{[m]}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\left(\frac{\pi}{L} m \right) x \right] \quad (x \in [0, L])$$

直交性：

$$\int_0^L dx \, e^{[m]}(x) e^{[m']}(x) = \delta_{mm'}$$

完全性 (フーリエ級数展開)：

$f(x)$ は区間 $[0, L]$ において連続で、区分的になめらかな関数であるとする。また $f(0) = 0, f(L) = 0$ とする。このとき、次が成り立つ：

$$f(x) = \int_0^L dy \, \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} e^{[m]}(x) e^{[m]}(y) \right\} f(y)$$

(計算メモ)

$$\begin{aligned} & \int_0^L dx \, e^{[m]}(x) e^{[m']}(x) \\ &= \int_0^L dx \, \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\left(\frac{\pi}{L} m \right) x \right] \times \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\left(\frac{\pi}{L} m' \right) x \right] \\ &= \int_0^L dx \, \frac{1}{L} \left\{ \cos \left[\left(\frac{\pi}{L} (m - m') \right) x \right] - \cos \left[\left(\frac{\pi}{L} (m + m') \right) x \right] \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{L} \left(L - \frac{L}{\pi(2m)} \sin \left[\left(\frac{\pi}{L} (2m) \right) x \right] \right) \Big|_0^L & (m = m') \\ \frac{1}{L} \left[\frac{L}{\pi(m-m')} \sin \left[\left(\frac{\pi}{L} (m - m') \right) x \right] - \frac{L}{\pi(m+m')} \sin \left[\left(\frac{\pi}{L} (m + m') \right) x \right] \right] \Big|_0^L & (m \neq m') \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & (m = m') \\ 0 & (m \neq m') \end{cases} \end{aligned}$$