例題 4 (弦の振動：横微小振動, 自由端の場合の境界条件)

水平面上に，２本の支柱が間隔 L で平行に設置されている．それぞれの支柱には，滑らかに動くことができる小さなリングが取り付けてある．このリングの間に弦を張る．弦の線密度は σ，弦に働く張力は T とする．また，弦は十分軽く，重力の効果は無視できるものとする．

図 1 のように，支柱と平行な方向への弦の変位を $y(t,x)$ として，以下の問に答えよ．

1. 弦の端点で成り立つべき境界条件を求めよ．
2. 弦の微小振動の基準振動をもとめよ．
3. 基準振動の形を与える関数が互いに直交することを示せ．

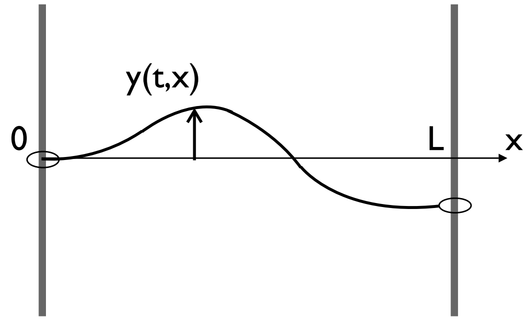

図 1: 弦の振動 – 自由端 –

(解答例)

1. 区間 $[0,\Delta x]$ にある質量素片の微小振動の運動方程式は，次のように与えられる：

$$\begin{aligned} 0 &= T\theta(\Delta x) + F_{\perp} \\ (\sigma\Delta x)\,\ddot{y}(t,0) &= T\theta(\Delta x) + F_{\parallel} \end{aligned}$$

ただし，支柱が弦の端のリングに及ぼす力の x 成分，y 成分をそれぞれ $F_{\perp}$, $F_{\parallel}$ とした．ここで，リングと支柱の間に摩擦力が働かないことを考慮すれば，$F_{\parallel}=0$. また，$\theta(\Delta x) \simeq \theta(0) + \theta'(0)\Delta x = \frac{\partial y}{\partial x}(t,0) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t,0)\Delta x$ であるから，

$$\ddot{y}(t,0) = \frac{T}{\sigma}\left(\frac{1}{\Delta x}\frac{\partial y}{\partial x}(t,0) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t,0)\right)$$

$\Delta x \to 0$ の極限で，右辺が有限の値に収束するために，

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t,0) = 0$$

が成り立つことが必要．さもなくば，質量素片に働く力が無限大になる．(区間 $[\Delta x, 2\Delta x]$ にある質量素片に働く力は，同じ極限で有限になっていることに注意．)

同様の考察より，

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, L) = 0$$

2. 基準振動をもとめるために，

$$y(t,x) = [a\cos(kx) + b\sin(kx)]\,\cos(\omega t + \alpha)$$

とおく．波動方程式および境界条件より

$$\omega^2 = \frac{T}{\sigma}k^2$$

$$bk = 0, \qquad [-ak\sin(kL) + bk\cos(kL)] = 0$$

$$\therefore \quad b = 0, \qquad k = \frac{\pi}{L}m \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$$

ここで，m が負の整数の場合は，正の整数 $m' = -m$ の解に帰着する．

これより，基準振動は

$$y(t,x) \;=\; \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L}}\left\{a_{[0]} + b_{[0]}t\right\} & (m=0) \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\,\cos\left[\left(\frac{\pi}{L}m\right)x\right]\,\left\{a_{[m]}\cos(\omega_{[m]}t) + b_{[m]}\sin(\omega_{[m]}t)\right\} & (m = 1, \cdots, \infty) \end{cases}$$

ただし，

$$\omega_{[m]}^2 = \frac{T}{\sigma}\left(\frac{\pi}{L}m\right)^2 \quad (m = 1, 2, \cdots, \infty)$$

3. 弦の基準振動の形を与える関数は次のようにとることができる：

$$\tilde{e}^{[m]}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L}} & (m=0) \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] & (m = 1, 2, \cdots, \infty) \end{cases}$$

これらが正規直交系をなすこと，すなわち，

$$\int_0^L dx\;\tilde{e}^{[m]}(x)\,\tilde{e}^{[m']}(x) = \begin{cases} 1 & (m = m') \\ 0 & (m \neq m') \end{cases} \qquad (\equiv \delta_{m,m'})$$

が成り立つことは以下のように示すことができる：

$$\begin{aligned}
\int_0^L dx\ \tilde{e}^{[0]}(x)\,\tilde{e}^{[0]}(x) &= \int_0^L dx\,\frac{1}{L} = 1 \\
\int_0^L dx\ \tilde{e}^{[m]}(x)\,\tilde{e}^{[0]}(x) &= \int_0^L dx\,\frac{\sqrt{2}}{L}\ \cos\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{L}\,\frac{L}{m\pi}\left[\sin\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right]\right]_0^L = 0\ (m = 1, \cdots, \infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L dx\ \tilde{e}^{[m]}(x)\,\tilde{e}^{[m']}(x) &= \int_0^L dx\,\frac{2}{L}\ \cos\left[x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\right]\ \cos\left[x\left(\frac{m'\pi}{L}\right)\right] \\
&= \int_0^L dx\,\frac{1}{L}\ \left\{\cos\left[x\left(\frac{(m+m')\pi}{L}\right)\right] + \cos\left[x\left(\frac{(m-m')\pi}{L}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{(m+m')\pi}\left[\sin\left[x\left(\frac{(m+m')\pi}{L}\right)\right]\right]_0^L \\
&\quad + \begin{cases} 1 & (m = m') \\ \frac{1}{(m-m')\pi}\left[\sin\left[x\left(\frac{(m-m')\pi}{L}\right)\right]\right]_0^L & (m \neq m') \end{cases} \\
&= \delta_{mm'} \quad (m, m' = 1, \cdots, \infty)
\end{aligned}$$

(注)　完全性については，次が成り立つ (フーリエ級数展開)：

$g(x)$ は区間 $[0, L]$ において連続で，区分的になめらかな関数であるとする．また $g'(0) = 0$, $g'(L) = 0$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$g(x) = \int_0^L dy\ \left\{\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{e}^{[m]}(x)\,\tilde{e}^{[m]}(y)\right\}\,g(y)$$