

問題 3-1 (3 連成振り子)

おもりの質量 m ，ひもの長さ l の振り子が 3 つバネで結ばれている。(図 1, 2) バネはすべて同じもので，自然長は a_0 ，バネ定数は k であり，バネの質量は無視できるものとする。図 1 の場合は，平衡点でのバネののびはすべて a とする。図 2 の場合は，平衡点でのバネののびはすべて自然長 a_0 とする。いずれの場合も，縦振動のみ考える。図 1, 2 のそれぞれの場合に，系の微小振動の基準振動を求め，基準振動の形を図示せよ。(行列を用いた解法を試みよ。)

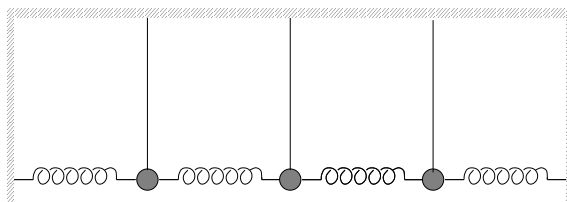


図 1:

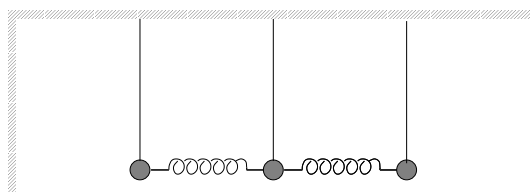


図 2:

問題 3-2 (N 連成振り子の基準振動，固定端)

図 3 のような N-連成振り子の微小縦振動を考える．おもりの質量は M ，ひもの長さは l ，バネ定数は K ，バネの自然長は a_0 ，平衡時のバネののびは a とする．また，重力加速度の大きさを g とする．

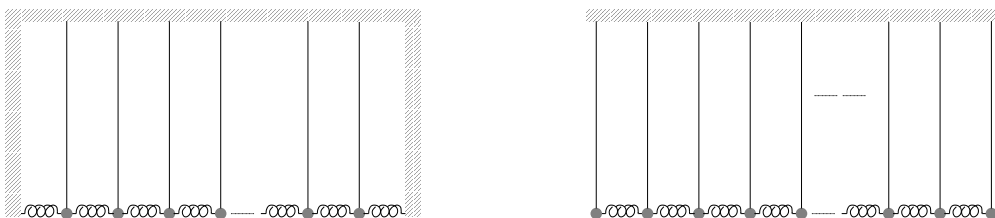


図 3: N-連成振り子．固定端（左）と自由端（右）．

1. 固定端の場合（図 1 左）に，基準振動数および基準振動の形を求めよ。(境界条件による解法を試みよ。)
2. 自由端の場合（図 1 右）に，基準振動数および基準振動の形を求めよ。(境界条件による解法を試みよ。)

3. $N = 3$ の場合に, 問題 3-1 (図 1 : 固定端) の結果と比較してみよ。
4. 固定端 $N = 5$ の場合に基準振動の形を図示せよ。

問題 3-3 (周期的な N -連成振子)

円周状のなめらかなガイドの中で, N 個の質量 m のおもりがバネで連結されている。(図 1) N 本のバネはすべて等しく, バネ定数は k とする。この系の微小振動の基準振動数および基準振動の形を求めよ。

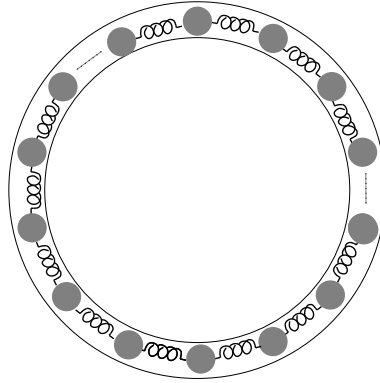


図 4: 周期的な N -連成振子

系の縦振動の運動方程式は、行列表記を用いると次のように与えられる:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_0 + k + k_l & -k & 0 \\ -k & k_0 + 2k & -k \\ 0 & -k & k_0 + k + k_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ここで $k_0 = mg/l$ である。 $k_l = k_r = k$, $k_l = k_r = 0$ のそれぞれの場合が図 1, 2 の系に対応する。基準振動解を $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \alpha)$ と仮定すれば, ω , $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ が満たすべき方程式は次の固有値方程式になる:

$$\frac{1}{m} \begin{pmatrix} k_0 + k + k_l & -k & 0 \\ -k & k_0 + 2k & -k \\ 0 & -k & k_0 + k + k_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

この固有値方程式が非自明な解をもつための条件は次のとおり:

$$\begin{vmatrix} \frac{k_0+k+k_l}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k_0+2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k_0+k+k_r}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

すなわち

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k_0 + k + k_l}{m} - \omega^2 \right) \left(\frac{k_0 + 2k}{m} - \omega^2 \right) \left(\frac{k_0 + k + k_r}{m} - \omega^2 \right) \\ & - 2 \left(-\frac{k}{m} \right)^2 \left(\frac{k_0 + k + (k_r + k_l)/2}{m} - \omega^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

- 図 1 の系 ($k_l = k_r = k$) の場合:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k_0 + 2k}{m} - \omega^2 \right) \left[\left(\frac{k_0 + 2k}{m} - \omega^2 \right)^2 - 2 \left(-\frac{k}{m} \right)^2 \right] = 0 \\ \therefore \quad \omega^2 &= \frac{k_0 + (2 - \sqrt{2})k}{m}, \frac{k_0 + 2k}{m}, \frac{k_0 + (2 + \sqrt{2})k}{m} \\ \therefore \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 図 2 の系 ($k_l = k_r = 0$) の場合:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k_0 + k}{m} - \omega^2 \right) \left[\left(\frac{k_0 + 2k}{m} - \omega^2 \right) \left(\frac{k_0 + k}{m} - \omega^2 \right) - 2 \left(-\frac{k}{m} \right)^2 \right] = 0 \\ \therefore \quad \omega^2 &= \frac{k_0}{m}, \frac{k_0 + k}{m}, \frac{k_0 + 3k}{m} \\ \therefore \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. 固定端の場合, 微小縦振動の運動方程式は次のように与えられる:

$$M\ddot{x}_n = -M\left(\frac{g}{l}\right)x_n - K(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (1)$$

ただし, 境界条件として固定端条件

$$x_0(t) = 0, \quad x_{N+1}(t) = 0 \quad (2)$$

を満たすものとする. 基準振動を求めるために, $x_n(t) = A_n \cos(\omega t + \alpha)$ とし, $A_n = a \cos[n\theta] + b \sin[n\theta]$ とおく. 境界条件を一旦無視して考えると, $x_n(t)$ が運動方程式を満たすためには,

$$\omega^2 = \left(\frac{g}{l}\right) + \frac{4K}{M} \sin^2(\theta/2)$$

が成り立つ必要がある. 境界条件 $x_0(t) = 0$ かつ $x_{N+1}(t) = 0$ を考慮すると,

$$a = 0 \quad \text{かつ} \quad \sin[(N+1)\theta] = 0$$

したがって

$$a = 0 \quad \text{かつ} \quad \theta = \frac{\pi}{(N+1)}m \quad (m \text{ は任意の整数})$$

すなわち

$$A_n = b \sin \left[n \left(\frac{\pi}{(N+1)}m \right) \right], \quad \omega^2 = \left(\frac{g}{l}\right) + \frac{4K}{M} \sin^2 \left(\left(\frac{\pi}{2(N+1)}m \right) \right)$$

ただし, $m = 0$ は自明な解 $A_n = 0$ を与える. また, A_n 及び ω^2 は $m \rightarrow -m$, $m \rightarrow m + 2(N+1)$ の入れ替えに対して同じになるので, 結局, 基準振動解は $m = 1, 2, \dots, N$ の N 個の場合を考えればよい. 以上より, 基準振動解は次のように与えられる:

$$x_n(t) = A_{[m]} \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \left[n \left(\frac{\pi}{(N+1)}m \right) \right] \cos(\omega_{[m]}t + \alpha_{[m]}) \quad (3)$$

$$\omega_{[m]}^2 = \left(\frac{g}{l}\right) + \frac{4K}{M} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2(N+1)}m \right) \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

2. 固定端 $N=5$ の場合の基準振動の形:

$$\omega_{[m]}^2 = \frac{4K}{M} \sin^2 \left(\frac{\pi}{12}m \right) \quad (m = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$e_n^{[m]} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left[n \left(\frac{\pi}{6}m \right) \right] \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5)$$

微小縦振動の運動方程式は次のように与えられる:

$$M\ddot{x}_n = -K(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

また, 境界条件は

$$x_0(t) = x_N(t), \quad x_{N+1}(t) = x_1(t)$$

となる. (これは周期境界条件と呼ばれる.)

基準振動を求めるために, $x_n(t) = A_n \cos(\omega t + \alpha)$ とし, $A_n = a \cos[n\theta] + b \sin[n\theta]$ とおく. このとき境界条件は $A_0 = A_N$, $A_{N+1} = A_1$ と表すことができる. 境界条件を一旦無視して考えると, 仮定した解が運動方程式を満たすためには $\omega^2 = \frac{4K}{M} \sin^2(\theta/2)$ が成り立つ必要がある. また, 境界条件より

$$a = a \cos[N\theta] + b \sin[N\theta], \quad (5)$$

$$a \cos[(N+1)\theta] + b \sin[(N+1)\theta] = a \cos[\theta] + b \sin[\theta]. \quad (6)$$

すなわち

$$\begin{aligned} \{a(1 - \cos[N\theta]) - b \sin[N\theta]\} &= 0, \\ \{a \sin[N\theta] + b(1 - \cos[N\theta])\} \sin[\theta] &= 0. \end{aligned}$$

$\sin[\theta] \neq 0$ として,

$$(b^2 + a^2) \sin[N\theta] \sin[\theta] = (a^2 + b^2) (1 - \cos[N\theta]) \sin[\theta] = 0.$$

したがって

$$\therefore \theta = \theta_m \equiv \frac{2\pi}{N}m \quad (m = 0, 1, \dots, N-1).$$

これより基準振動数は次のように決まる:

$$\therefore \omega_{[m]}^2 = \frac{4K}{M} \sin^2\left(\frac{\pi}{N}m\right) \quad (m = 0, 1, \dots, N-1).$$

ここで, m と $N-m$ は同じ固有値を与えるので, 一般に 2 重に縮退している. ただし, $m = 0$ 及び N が偶数のときの $m = N/2$ は縮退しない.

$\theta_{N-m} = -\theta_m + 2\pi$ の関係にあり, 波数の符号が正負逆転しているものが縮退している. 縮退のあるとき, 基準振動の形を与える固有ベクトルは, 次のようにとることができ, 互いに直交する.

$$e_n^{(m)} = \sin\left[n \frac{2\pi}{N}m\right], \quad e_n^{(N-m)} = \cos\left[n \frac{2\pi}{N}m\right] \quad (1 \leq m \leq [N/2])$$

したがって, N 個の固有ベクトルは互いに直交する.

$$e^{(m)} \cdot e^{(m)} = 0 \quad (m \neq m').$$

注) $\sin[\theta] = 0$ のとき, $\theta = \pi m'$ (m' は任意の整数). $m' =$ 偶数のときは, $A_n = a$, $\omega^2 = 0$ となり, $m = 0$ の解に一致する. $m' =$ 奇数のときは, 境界条件 (5) をみたすために, $N =$ 偶数が必要であり, $A_n = (-1)^n a$, $\omega^2 = \frac{4K}{M}$ となり, $m = N/2$ の解と一致する.

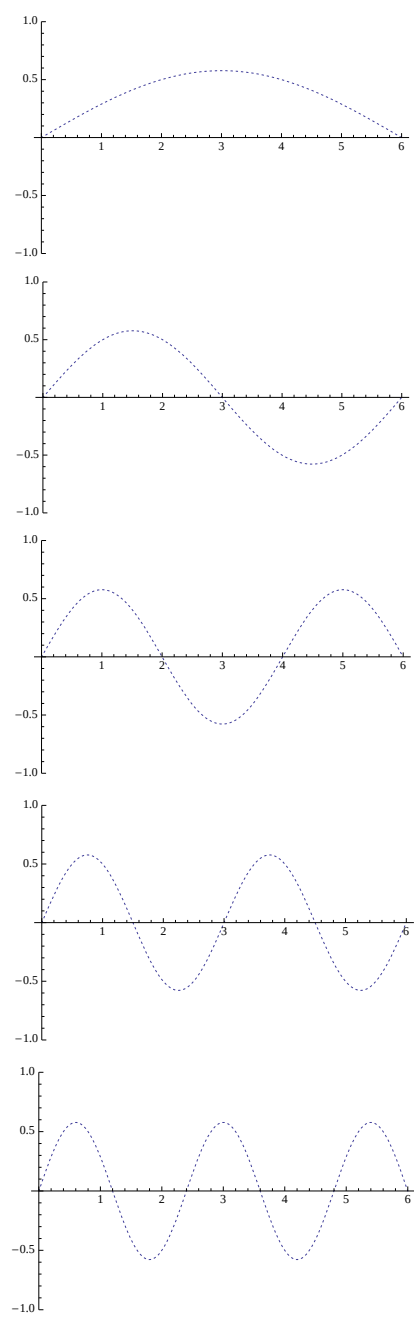


图 5: $N=5$