まとめ　2. 連成振子の基準振動, 基準振動と固有値方程式

連成振子の運動方程式：

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k'(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

基準振動 (Normal mode)： 共通の振動数，位相をもつ解

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \alpha) \\ x_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

基準振動数 ω, 振幅 A_1, A_2 が満たすべき方程式：

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A_1 &= -kA_1 - k'(A_1 - A_2) \\ -m\omega^2 A_2 &= -kA_2 - k'(A_2 - A_1) \end{aligned}$$

解：$\omega_0^2 = k/m$ として

$$\begin{aligned} &\omega_1^2 = \omega_0^2, && A_2/A_1 = +1 \\ &\omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k'}{m}, && A_2/A_1 = -1 \end{aligned}$$

一般解：

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\ x_2(t) &= a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned}$$

基準座標 ： 独立な 2 つの単振動子に帰着するような座標

$$\begin{aligned} Q_{[1]}(t) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1(t) + x_2(t)\right) \\ Q_{[2]}(t) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1(t) - x_2(t)\right) \end{aligned}$$

基準座標 $Q_{[1]}, Q_{[2]}$ が満たす方程式：

$$\begin{aligned} m\,\ddot{Q}_{[1]}(t) &= -k\,Q_{[1]}(t) \\ m\,\ddot{Q}_{[2]}(t) &= -(k + 2k')\,Q_{[2]}(t) \end{aligned}$$

系のエネルギー：

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) + \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{k'}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{Q_{[1]}}^2 + (k/m)Q_{[1]}^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{Q_{[2]}}^2 + (k/m + 2k'/m)Q_{[2]}^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{Q_{[1]}}^2 + \omega_1^2 Q_{[1]}^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{Q_{[2]}}^2 + \omega_2^2 Q_{[2]}^2\right) \end{aligned}$$

連成振子の運動方程式の行列表記：

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad m\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (k+k') & -k' \\ -k' & (k+k') \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

基準振動：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\cos(\omega t + \alpha)$$

運動方程式は固有値方程式に帰着する！

$$\frac{1}{m}\begin{pmatrix} (k+k') & -k' \\ -k' & (k+k') \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \omega^2\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

- 固有値 $\Longrightarrow$ (基準振動数)^2
- 固有ベクトル $\Longrightarrow$ 振幅比 (基準振動の形)

  非自明な解, $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \neq 0$, が存在する条件

$$\left|\frac{1}{m}\begin{pmatrix} (k+k') & -k' \\ -k' & (k+k') \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{(k+k')}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(-\frac{k'}{m}\right)^2 = 0$$

- 固有値方程式の解

  1. $\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \equiv \omega_{[1]}^2$; $\quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ +1 \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{e}^{[1]}$
  2. $\omega^2 = \frac{k+2k'}{m} \equiv \omega_{[2]}^2$; $\quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{e}^{[2]}$

- 基準座標

  $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすれば,

$$Q_{[1]}(t) \equiv \boldsymbol{e}^{[1]} \cdot \boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1(t) + x_2(t))$$
$$Q_{[2]}(t) \equiv \boldsymbol{e}^{[2]} \cdot \boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1(t) - x_2(t))$$

- 一般解の表式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{e}^{[1]} Q_{[1]}(t) + \boldsymbol{e}^{[2]} Q_{[2]}(t) \\ &= \boldsymbol{e}^{[1]} A_{[1]} \cos(\omega_{[1]} t + \alpha_{[1]}) + \boldsymbol{e}^{[2]} A_{[2]} \cos(\omega_{[2]} t + \alpha_{[2]}) \end{aligned}$$

※ $\boldsymbol{e}^{[1]}, \boldsymbol{e}^{[2]}$ は２次元ベクトル空間の基底　$\Longrightarrow$　２つの基準振動の線形独立性

- 固有ベクトル $\boldsymbol{e}^{[1]}, \boldsymbol{e}^{[2]}$ (実対称行列の固有ベクトル) の性質

1. (正規) 直交性

$$\boldsymbol{e}^{[1]} \cdot \boldsymbol{e}^{[1]} = 1, \quad \boldsymbol{e}^{[2]} \cdot \boldsymbol{e}^{[2]} = 1, \quad \boldsymbol{e}^{[1]} \cdot \boldsymbol{e}^{[2]} = 0$$

2. 完全性

$$\boldsymbol{e}^{[1]}\, {}^t\boldsymbol{e}^{[1]} + \boldsymbol{e}^{[2]}\, {}^t\boldsymbol{e}^{[2]} = \mathbb{I}, \qquad \text{ただし} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 対角化

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \begin{pmatrix} (k+k') & k' \\ k' & (k+k') \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^{[1]} & \boldsymbol{e}^{[2]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{[1]}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{[2]}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{e}^{[1]} \\ {}^t\boldsymbol{e}^{[2]} \end{pmatrix} \\ &= \omega_{[1]}^2\, \boldsymbol{e}^{[1]}\, {}^t\boldsymbol{e}^{[1]} + \omega_{[2]}^2\, \boldsymbol{e}^{[2]}\, {}^t\boldsymbol{e}^{[2]} \end{aligned}$$

うなり：

$x_1(0) = a, \dot{x}_1(0) = 0;\ x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a\,[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] = 2a\, \cos(\Delta\omega t)\, \cos(\bar{\omega} t) \\ x_2(t) &= a\,[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] = 2a\, \sin(\Delta\omega t)\, \sin(\bar{\omega} t)] \end{aligned}$$

ただし，$\omega_1 = \bar{\omega} - \Delta\omega,\ \omega_2 = \bar{\omega} + \Delta\omega$