問題 2-1 (2 連成振り子, うなり)

二つの振り子のおもりがバネで結ばれている。(図 1) おもりの質量は m とし，ひもの長さは l とする。バネの質量は無視でき，バネの自然長は振り子の間隔に等しく，バネ定数は k とする。振り子のおもりの運動はバネと平行な方向に限られるとする。

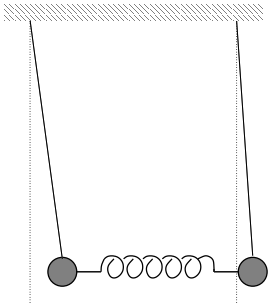

図 1: 2 連成振子

1. この系の微小振動の基準振動を求めよ。

2. バネの結合が小さいとき，この系のうなりの様子を調べよ。

問題 2-2 (2 重振り子の基準振動)

おもりの質量 m_1, ひもの長さ l_1 の振り子に，さらに，おもりの質量 m_2, ひもの長さ l_2 の振り子を取り付けた 2 重振り子を考える。(図 1) この系の微小振動の基準振動を求めよ。ただし，2 組の振り子の運動はすべて一つの鉛直な平面内に限られているとしてよい。

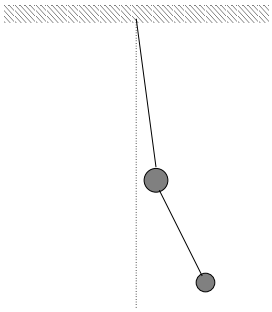

図 2: 2 重振り子

問題 2-3 (自由度 2 の LC 回路)

次の図のような自由度 2 の LC 回路の運動方程式を求めよ。この系の基準振動を求めよ。

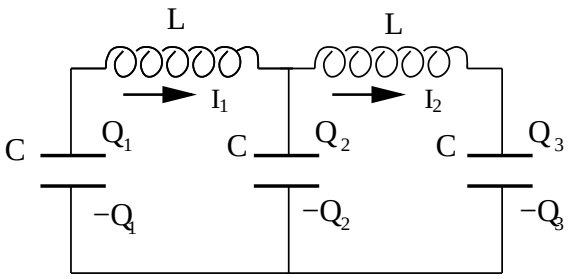

図 3: 自由度 2 の LC 回路

問題 2-4 (2 連成振子：おもりの質量が異なる場合)

二つの振り子のおもりがバネで結ばれている。(図 1) ふたつのおもりの質量をそれぞれ m_1, m_2 とし，ひもの長さはどちらも l とする。バネの質量は無視でき，バネ定数は k とする。

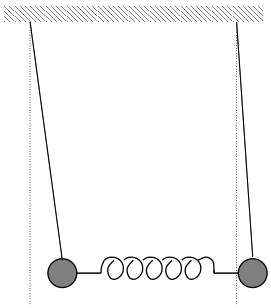

図 4: 2 連成振子

1. この系の微小振動の基準振動を求めよ。ただし，おもりの運動はバネと平行な方向に限られるとする。

2. バネの結合定数が小さいとき，この系のうなりの様子を調べよ。二つのおもりの質量が等しいとき ($m_1 = m_2 = m$) のうなりと違いがあれば，それを議論せよ。

問題 2-5(CO_2 分子の基準振動)

CO_2 分子の模型として，中心にある質量 m_2 の質点に，バネ定数 k のバネで質量 m_1 の質点が 2 つ一直線上に結合している系を考えることができる。質点が結合方向に微小振動するとき，基準振動をもとめよ。$m_1 = 16$ amu(原子質量単位), $m_2 = 12$ amu(原子質量単位) のとき，基準振動数の比を求めよ。

1. この系の運動方程式は，x_1, x_2 を微小変位として

$$m\ddot{x}_1 = -m\left(\tfrac{g}{l}\right)x_1 - k(x_1 - x_2),$$
$$m\ddot{x}_2 = -m\left(\tfrac{g}{l}\right)x_2 - k(x_2 - x_1).$$

2 式の和と差をとれば,

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -m\left(\frac{g}{l}\right)(x_1 + x_2), \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -m\left(\frac{g}{l}\right)(x_1 - x_2) - 2k(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

したがって基準振動，基準座標は

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \qquad Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2),$$
$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}, \qquad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2).$$

一般解はこれらの基準振動の重ね合わせで表される:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}[a_1\cos(\omega_1 t) + b_1\sin(\omega_1 t)] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}[a_2\cos(\omega_2 t) + b_2\sin(\omega_2 t)] \end{aligned}$$

2. 初期条件 $x_1(0) = x_0, \dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$ を代入して，解を求めると

$$\begin{aligned} x_1(t)/x_0 &= \frac{1}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}\cos(\omega_2 t) \\ &= \cos(\bar{\omega}t)\cos(\Delta\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t)/x_0 &= \frac{1}{2}\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{2}\cos(\omega_2 t) \\ &= \sin(\bar{\omega}t)\sin(\Delta\omega t) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}\right), \\ \Delta\omega &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{k}{2\bar{\omega}}\frac{1}{m} \end{aligned}$$

うなりの周期は

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{4\pi\bar{\omega}}{(k/m)} = \frac{2\pi}{(k/m)}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}\right).$$

長さ l_1 のひも，長さ l_2 のひもの鉛直線からの傾きをそれぞれ θ_1，θ_2 とする。支点を原点 O とすると，質量 m_1 のおもりの座標 (x_1, y_1)，質量 m_2 のおもりの座標 (x_2, y_2) はそれぞれ次のように与えられる:

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin\theta_1 \\ y_1 = -l_1 \cos\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_1 \sin\theta_2 \\ y_2 = -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

このとき，長さ l_1 のひも，長さ l_2 のひもの張力をそれぞれ T_1，T_2 とおくと，運動方程式は次のように与えられる:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 \\ m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + T_1 \cos\theta_1 - T_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 = -T_2 \sin\theta_2 \\ m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + T_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

θ_1，θ_2 が微小であるとすると

$$\begin{cases} x_1 \simeq l_1\theta_1 \\ y_1 \simeq -l_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \simeq l_1\theta_1 + l_1\theta_2 \\ y_2 \simeq -l_1 - l_2 \end{cases}$$

このとき，運動方程式は

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -(m_1 + m_2)(g/l_1)x_1 + m_2(g/l_2)(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -m_2(g/l_2)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

基準振動を決める固有値方程式は

$$\begin{pmatrix} g/l_1 + \frac{m_2}{m_1} g\Big(1/l_1 + 1/l_2\Big) & -\frac{m_2}{m_1} g/l_2 \\ -g/l_2 & g/l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

これより

$$\begin{aligned} &(\omega^2)^2 - (1 + m_2/m_1) g(1/l_1 + 1/l_2)(\omega^2) + (1 + m_1/m_2)(g/l_1)(g/l_2) = 0 \\ &\therefore \quad \omega_\pm^2 = \frac{1}{2} \Big\{ (1 + m_2/m_1) g(1/l_1 + 1/l_2) \pm \\ &\qquad\qquad \sqrt{\Big[(1 + m_2/m_1) g(1/l_1 + 1/l_2)\Big]^2 - 4(1 + m_2/m_1)(g/l_1)(g/l_2)} \Big\} \end{aligned}$$

対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}_\pm \simeq \begin{pmatrix} 1 - \omega_\pm^2/(g/l_2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$m_1 = m_2$，$l_1 = l_2 = l$ とすると

$$\omega_\pm^2 = (2 \pm \sqrt{2})(g/l)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}_\pm \simeq \begin{pmatrix} -1 \mp \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

[解答例] 問題 2-3 (自由度 2 の LC 回路)

$$I_1 = -\dot{Q}_1, \quad I_2 = +\dot{Q}_3, \quad I_1 - I_2 = \dot{Q}_2$$

とおく。これより $\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 = 0$。積分すれば $Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t) = Q_0 =$ 一定。$Q_0 = 0$ としても一般性は失われない。”閉回路の電圧降下はゼロ”の関係式は

$$L\dot{I}_1 - \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_2}{C} = 0$$
$$L\dot{I}_2 + \frac{Q_3}{C} - \frac{Q_2}{C} = 0$$

これより電荷の運動方程式は

$$L\ddot{Q}_1 = -\frac{Q_1}{C} + \frac{Q_2}{C} = -\frac{Q_1}{C} - \frac{Q_1 + Q_3}{C}$$
$$L\ddot{Q}_3 = -\frac{Q_3}{C} + \frac{Q_2}{C} = -\frac{Q_3}{C} - \frac{Q_1 + Q_3}{C}$$

これは次のように単振動の方程式に組み直すことができる:

$$(\ddot{Q}_1 + \ddot{Q}_3) = -\frac{3}{LC}(Q_1 + Q_3)$$
$$(\ddot{Q}_1 - \ddot{Q}_3) = -\frac{1}{LC}(Q_1 - Q_3)$$

したがって，基準振動数および振幅比は

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}, \quad \frac{3}{LC}$$
$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[解答例] 問題 2-4 (2 連成振子：おもりの質量が異なる場合)

1. この系の運動方程式は，x_1, x_2 を微小変位として

$$m_1\ddot{x}_1 = -m_1\left(\tfrac{g}{l}\right)x_1 - k(x_1 - x_2),$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -m_2\left(\tfrac{g}{l}\right)x_2 - k(x_2 - x_1).$$

行列表記をすれば

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

基準振動解を求めるために，次の様な解を仮定する:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\cos(\omega t + \alpha).$$

このとき，運動方程式は次の固有値方程式に帰着する:

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \omega^2\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

この固有値方程式に自明でない解が存在するための必要条件は

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l}+\frac{k}{m_1}-\omega^2 & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{g}{l}+\frac{k}{m_2}-\omega^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m_1}-\omega^2\right)\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m_2}-\omega^2\right)-\left(\frac{k}{m_1}\frac{k}{m_2}\right)=0.$$

すなわち

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega^2)^2-\left(2\frac{g}{l}+\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}\right)\omega^2+\left(\frac{g}{l}\right)\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}\right) \\ &= \left(\omega^2-\frac{g}{l}\right)\left[\omega^2-\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}\right)\right]. \end{aligned}$$

したがって固有値，対応する固有ベクトルは

$$\omega_1^2=\frac{g}{l}, \qquad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2=\frac{g}{l}+\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}$$

一般解はこれらの基準振動の重ね合わせで表される:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}[a_1\cos(\omega_1 t)+b_1\sin(\omega_1 t)] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}[a_2\cos(\omega_2 t)+b_2\sin(\omega_2 t)] \end{aligned}$$

2. 初期条件 $x_1(0)=x_0, \dot{x}_1(0)=0,\ x_2(0)=0, \dot{x}_2(0)=0$ を代入して，解を求めると

$$\begin{aligned} x_1(t)/x_0 &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos(\omega_1 t)+\frac{m_2}{m_1+m_2}\cos(\omega_2 t) \\ &= \cos(\bar{\omega}t)\cos(\Delta\omega t)-\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\sin(\bar{\omega}t)\sin(\Delta\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t)/x_0 &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos(\omega_1 t)-\frac{m_1}{m_1+m_2}\cos(\omega_2 t) \\ &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos(\bar{\omega}t)\cos(\Delta\omega t) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{\omega_1+\omega_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}+\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}\right), \\ \Delta\omega &= \frac{\omega_2-\omega_1}{2}=\frac{k}{4\bar{\omega}}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) \end{aligned}$$

うなりの周期は

$$T=\frac{2\pi}{\Delta\omega}=\frac{8\pi\bar{\omega}}{k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}=\frac{4\pi}{k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}+\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}\right).$$

全系のエネルギーは

$$E=\frac{m_1}{2}\left\{\dot{x}_1^2+\frac{g}{l}x_1^2\right\}+\frac{m_1}{2}\left\{\dot{x}_2^2+\frac{g}{l}x_2^2\right\}+\frac{k}{2}(x_1-x_2)^2.$$

上記の初期条件の下では，おもり 2 は $m_1 = m_2$ のときと同様に，静止することがある。しかし，おもり 1 は一般に静止することがない。$m_1 = m_2$ のときのみ，静止することができる。おもりのエネルギー $E_i = \frac{m_1}{2}\left\{\dot{x}_i^2 + \frac{g}{l}x_i^2\right\}$ についても，おもり 2 ではゼロになるが，おもり 1 はゼロになることはない。おもり 1 のエネルギーが完全におもり 2 に遷移することはない。

[解答例] 問題 2-5 (CO_2 分子の基準振動)

(解答例) 一直線上の酸素原子，炭素原子，酸素原子の微小変位を x_1, x_2, x_3 とすると，運動方程式は

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

となる。非自明な基準振動解が存在するための条件は次のとおり:

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{m_1} - \omega^2 & -\frac{k}{m_1} & 0 \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{2k}{m_2} - \omega^2 & -\frac{k}{m_2} \\ 0 & -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

すなわち

$$\left(\frac{k}{m_1} - \omega^2\right)\left((\omega^2)^2 - \left(\frac{k}{m_1} + \frac{2k}{m_2}\right)\omega^2\right) = 0$$

$$\therefore \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m_1}, \quad \omega_3^2 = \frac{k}{m_1} + \frac{2k}{m_2}$$

$\omega_1 = 0$ の解は分子全体の並進運動に対応し，ω_2, ω_3 の解が基準振動に対応する。基準振動数の比は

$$\omega_3/\omega_2 = \sqrt{1 + 2m_1/m_2} = \sqrt{1 + 2(16)/(12)} = 1.91$$