例題 2 (3 連成振子の基準振動)

3つの質量 m の物体が，なめらかな床の上で，4本のバネ定数 k のバネによって直線状につながれている．バネの両端は床に固定されているとする．このとき，直線方向の振動 (縦振動) の基準振動を求め，基準振動の形を図示せよ。(ただし，バネの自然長は a_0 とし，3つのおもりと固定端は等間隔 a ($a > a_0$) で連結されているとせよ．)

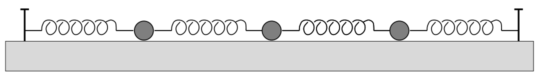

図 1: 3 連成振子

(解答例)

系の縦振動の運動方程式は，行列表記を用いると次のように与えられる:

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2k & -k & 0\\ -k & 2k & -k\\ 0 & -k & 2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

基準振動解を $\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}\cos(\omega t+\alpha)$ と仮定すれば，ω, $\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}$ が満たすべき方程式は次の固有値方程式になる:

$$\frac{1}{m}\begin{pmatrix}2k & -k & 0\\ -k & 2k & -k\\ 0 & -k & 2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix} = \omega^2\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}$$

この固有値方程式が非自明な解をもつための条件は次のとおり:

$$\begin{vmatrix}\frac{2k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m} & 0\\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m}\\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m}-\omega^2\end{vmatrix} = 0$$

すなわち

$$\left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right)\left[\left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right)^2 - 2\left(-\frac{k}{m}\right)^2\right] = 0$$

$$\therefore\quad \omega^2 = \frac{(2-\sqrt{2})k}{m},\ \frac{2k}{m},\ \frac{(2+\sqrt{2})k}{m}$$

対応する $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ は

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

[基準振動の様子]

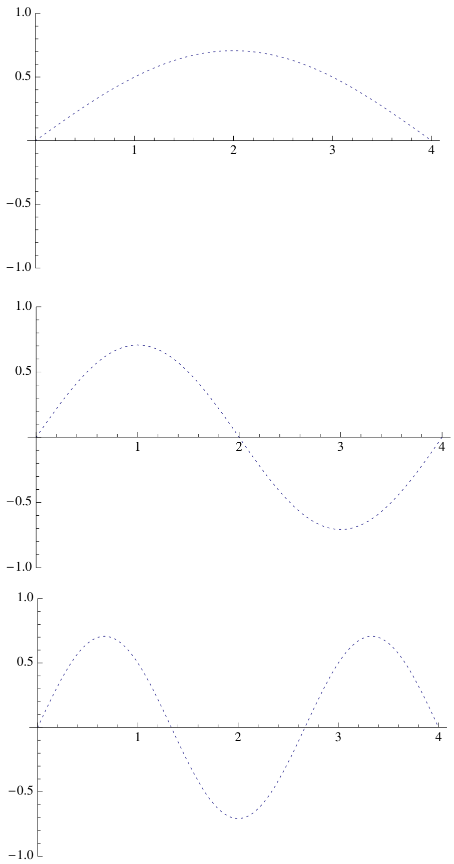

図 2: 3 連成振子の基準振動

$$\omega_{[i]}^2 = \frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{\pi}{8}i\right) \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$e_n^{[i]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left[n\left(\frac{\pi}{4}i\right)\right] \quad (i = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3)$$