まとめ　1. **単振動** (**調和振動**) [harmonic oscillation]

単振動： 運動方程式の解が余弦 (正弦) 関数で与えられる周期的な運動.

運動方程式

$$\ddot{x} = -\omega_0^2\, x \qquad \left(\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)$$

解

$$x(t) = A\,\cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (A,\, \alpha \text{ は積分定数})$$

- $A\,(>0)$: 振幅
- $\omega_0 t + \alpha$: 位相 (単位 [rad]),　α : 初期位相 ($t = 0$ での位相)
- ω_0 : 角振動数 (単位 [rad] [sec]$^{-1}$)
- $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$: 振動数 (単位 [sec]$^{-1}$)
- $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}$: 周期 (単位 [sec])
- 初期位置 $x(0) = x_0$, 初期速度 $\dot{x}(0) = v_0$ とすれば,

$$x(t) = x_0\,\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\,\sin(\omega_0 t)$$

- ポテンシャル・エネルギー

$$V(x) = \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,x^2 \quad ; \qquad F(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -m\omega_0^2 x$$

- $A \to \lambda A$ ($\alpha \to \alpha + \delta$) としても同じ周期をもつ解 : 線形性 (cf. 非線形振動)
  一般解は余弦解と正弦解の “線形結合” で与えられる.

$$x(t) = a\,\cos(\omega_0 t) + b\,\sin(\omega_0 t)$$

単振動の例： LC 回路, 単振り子の微小振動, . . .
多くの力学系において, 安定な平衡点付近の微小振動のときに実現される.
連成振子系では基準振動として単振動が実現される.

LC 回路の方程式：

$$L\,\ddot{Q} = -\frac{1}{C}\,Q$$

単振り子の運動方程式：

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta = -mg\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots\right)$$

平衡点付近でのポテンシャルの振る舞い：

$$V'(x_0) = 0 \qquad (x = x_0 : \text{ 平衡点})$$
$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3)$$

複素指数関数： $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ とする．

- 定義

$$\mathrm{e}^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

- 積

$$\mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$$

- 微分

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z$$

オイラーの公式： $\lambda = \nu + i\theta \ (\nu, \theta \in \mathbb{R})$ とすると，

$$\mathrm{e}^{\lambda} = \mathrm{e}^{\nu + i\theta} = \mathrm{e}^{\nu}\ (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}
\because \qquad \mathrm{e}^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}(i\theta)^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!}(i\theta)^{2m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)!}\theta^{2m} + i\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}\theta^{2m+1} \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

単振動解の複素数表示：

$$z(t) = c\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t} \qquad (c \in \mathbb{C}\ \text{は複素積分定数})$$

$c = A\,\mathrm{e}^{i\alpha}$ とすれば

$$\begin{aligned}
z(t) &= A\,\mathrm{e}^{i(\omega_0 t + \alpha)} \\
&= A\cos(\omega_0 t + \alpha) + \ i\,A\sin(\omega_0 t + \alpha)
\end{aligned}$$

参考文献

[1] ファインマン物理学 V 量子力学, 岩波書店

[2] ファインマン, 光と物質のふしぎな理論, 岩波書店

(参考) 単振動の運動方程式の積分

運動方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0 \tag{1}$$

の両辺に $\dot{x}$ を掛けると

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2\, x\dot{x} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2\right\} = 0. \tag{2}$$

したがって,

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = \text{一定}. \tag{3}$$

この一定値を E/m とおく．ここで E は単振動子のエネルギー (保存量) を与える．このとき,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2} \qquad \left(|x| \leq \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}\right) \tag{4}$$

であるから,

$$dt = \pm\frac{1}{\omega_0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2}} \tag{5}$$

と書くことができる．この両辺をそれぞれ積分する．

$$\omega_0\, t + \alpha = \pm\int^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2}}. \tag{6}$$

ここで，α は積分定数．右辺の積分において，$A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}$ として，$x = A\cos\theta$ によって x から θ に変数変換すれば,

$$\pm\int^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2}} = \pm\int^\theta \frac{(-A\sin\theta)d\theta}{|A\sin\theta|} = \mp\theta. \tag{7}$$

すなわち,

$$\omega_0 t + \alpha = \mp\theta. \tag{8}$$

したがって,

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{9}$$

を得る．A, α は積分定数であり，それぞれ，振幅，初期位相に対応する．A は単振動子のエネルギー E(保存量) と $E = (1/2)m\omega_0^2 A^2$ の関係にある．

また，加法定理を使って,

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\alpha\cos(\omega_0 t) - A\sin\alpha\sin(\omega_0 t), & (10)\\ \dot{x}(t) &= -\omega_0 A\cos\alpha\sin(\omega_0 t) - \omega_0 A\sin\alpha\cos(\omega_0 t). & (11) \end{aligned}$$

$x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ とすると,

$$\begin{aligned} x_0 &= +A\cos\alpha, & (12)\\ v_0 &= -\omega_0 A\sin\alpha, & (13) \end{aligned}$$

となる．