

問題 1-1 (LC 回路)

電気容量 C のコンデンサーと自己インダクタンス L のコイルからなる閉回路 (LC 回路) を考える。コンデンサーに蓄えられる電気量 $Q(t)$ の時間変化を与える方程式が単振動の方程式になることを示せ。また、振動の周期を C 及び L を用いて表せ。

問題 1-2 (モスキート (蚊) / 大人に聞こえない携帯電話の着信音)

英国の会社が開発したセキュリティシステム「モスキート (蚊)」や「大人に聞こえない携帯電話の着信音」で使われているブザー音の振動数を調べよ。この振動数を LC 回路で実現するものとして、 $1 \mu\text{F}$ (マイクロファラデー) のコンデンサーを使うと、コイルのインダクタンスはいくらにすればよいか。

問題 1-3 (U 字管中の液体の振動)

断面積が一定で、腕の鉛直な U 字管に液体が入った系を考える。(図 1) 管の断面積は A 、液体の密度は ρ 、液柱の長さは l 、重力加速度は g とする。平衡位置からの液面の鉛直変位を x とするとき、 x は単振動の方程式に従うことを示せ。単振動の振動数を求めよ。

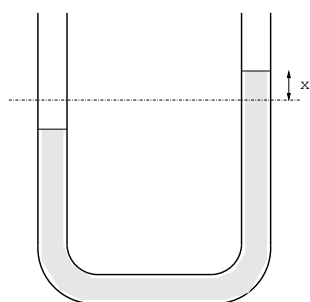


図 1: U 字管中の液体

問題 1-4 (非線形振動の例)

質量 m の物体が次の外力 $F(x)$ の作用のもとで、1 次元的な運動しているとする：

$$F(x) = \begin{cases} -F_0 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ +F_0 & (x < 0) \end{cases}$$

ただし、 F_0 は正の定数とする。このとき、運動方程式の解を求め、物体が振動することを確認せよ。振動の周期 T を求め、周期 T と振幅の関係を調べよ。(ヒント: $x > 0$ である時間と $x < 0$ である時間を分けて運動方程式の解を求め、それらを接続せよ。)

(注) この外力 $F(x)$ を与えるポテンシャル $V(x)$ は

$$V(x) = +F_0 |x|$$

となる。 $x = 0$ は安定な平衡点といえるが、このポテンシャルは $x = 0$ で微分不可能であり、 $x = 0$ のまわりでテイラー展開することができない。そのため、 $x = 0$ 近傍での振動は、たとえ振幅が小さくても単振動にはならず、非線形な振動になる。

[解答例] 問題 1-1 (LC 回路)

時刻 t に、コンデンサーの正極に蓄えられている電気を $Q(t)$ とする。このとき、コンデンサーの正極から流れ出る電流は $I(t) = -dQ(t)/dt$ となる。閉回路においては、各電気素子における電圧降下の総和がゼロになることから、

$$-\frac{Q(t)}{C} + L \frac{dI(t)}{dt} = 0. \quad (1)$$

$I(t)$ と $Q(t)$ の関係を用いれば、

$$\ddot{Q} = -\frac{1}{LC} Q(t). \quad (2)$$

この方程式は $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ とすれば、単振動の方程式と一致する。振動の周期は $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ で与えられる。

[解答例] 問題 1-2 (モスキート (蚊) / 大人に聞こえない携帯電話の着信音)

「モスキート (蚊)」のブザー音の振動数は 17 kHz. $f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$ であるから

$$L = \frac{1}{C(2\pi f)^2} = \frac{1}{1.0 \times 10^{-6} \times (2 \times 3.14 \times 17 \times 10^3)^2} = 1.0 \times 10^{-4} \quad (s^2/F)(H).$$

[解答例] 問題 1-3 (U 字管中の液体の振動)

液柱の質量は ρAl . 液中のポテンシャルエネルギーは平衡点を基準にすると $V = (\rho Ax)gx = \rho Ag x^2$. あるいは

$$V = \int_0^x (\rho A dy)gy - \int_{-x}^0 (\rho A dy)gy = \rho Ag x^2.$$

変位 x についての運動方程式は

$$(\rho Al) \ddot{x}(t) = -2\rho Ag x, \quad \therefore \ddot{x}(t) = -(2g/l) x.$$

これは単振動の方程式であり、振動数は $\omega_0 = \sqrt{2g/l}$.

[解答例] 問題 1-4 (非線形振動の例)

物体が $x > 0$ の領域を運動しているとすると、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -F_0 \quad (x > 0).$$

これを積分すると次を得る。ただし、 $v_0, x_0(>0)$ は時刻 $t=0$ での速度、位置をあたえる積分定数とする：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_0 - (F_0/m)t, \\ x(t) &= x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}(F_0/m)t^2. \end{aligned}$$

これより $x \geq 0$ の領域の運動の様子は次表にまとめられる：

時刻 $t = t_2$ 以降、物体は $x < 0$ の領域に進入するので、運動方程式は

$$m\ddot{x} = +F_0 \quad (x < 0).$$

t	$\frac{m}{F_0}\{v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2F_0x_0/m}\} \equiv t_1$	$t_1 < t < t_2$	$\frac{m}{F_0}\{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2F_0x_0/m}\} \equiv t_2$
$\ddot{x}$	0	$-F_0/m$	0
$\dot{x}$	$\sqrt{v_0^2 + 2F_0x_0/m} \equiv v_1$	$v_0 - (F_0/m)t$	$-\sqrt{v_0^2 + 2F_0x_0/m} = -v_1$
x	0	$x_0 + v_0t - \frac{1}{2}(F_0/m)t^2$	0

表 1: $x \geq 0$ での運動

これを積分すると次を得る。ただし、時刻 $t = t_2$ での速度 $-v_1$ 、位置 0 を代入した：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -v_1 + (F_0/m)(t - t_2), \\ x(t) &= -v_1(t - t_2) + \frac{1}{2}(F_0/m)(t - t_2)^2.\end{aligned}$$

これより $x \leq 0$ の領域の運動の様子は次表にまとめられる：

t	t_2	$t_2 < t < t_3$	$t_2 + \frac{2m}{F_0}v_1 \equiv t_3$
$\ddot{x}$	0	$+F_0/m$	0
$\dot{x}$	$-v_1$	$-v_1 + (F_0/m)(t - t_2)$	v_1
x	0	$-v_1(t - t_2) + \frac{1}{2}(F_0/m)(t - t_2)^2$	0

表 2: $x \leq 0$ での運動

時刻 $t = t_3$ 以降、物体は再び $x > 0$ の領域に進入するが、この時の速度、位置は $t = t_1$ のものと一致するので、物体の運動は $t = t_1$ 以降のものの繰り返しになることがわかる。したがって物体は振動する。振動の周期は

$$T = t_3 - t_1 = 4 \left(\frac{m}{F_0} \right) \sqrt{v_0^2 + 2F_0x_0/m}.$$

これは初期振幅 x_0 と初期速度 v_0 に依存している。