まとめ　12. **減衰振動，強制振動，共鳴**

減衰振動の運動方程式：

$$\ddot{x} + 2\gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

減衰振動の例：

- 空気抵抗のある振り子の微小振動：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad 2\gamma = \frac{6\pi a\eta}{m}$$

- LCR 回路

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad 2\gamma = \frac{R}{L}$$

減衰振動解の振る舞い：

1. 減衰振動： $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[x_0\cos(\omega t) + \frac{(v_0+\gamma x_0)}{\omega}\sin(\omega t)\right] \qquad \left(\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right)$$

2. 過減衰：　$\gamma > \omega_0$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[x_0\cosh(\nu t) + \frac{(v_0+\gamma x_0)}{\nu}\sinh(\nu t)\right] \qquad \left(\nu = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)$$

3. 臨界減衰： $\gamma = \omega_0$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\omega_0 t}\,[x_0 + (v_0 + \omega_0 x_0)\,t]$$

(注) 過減衰解は減衰振動解で $\gamma \to \omega_0$ の極限をとることで求めることができる.

強制振動の運動方程式 (周期的外力)：

$$\ddot{x} + 2\gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = f_0\cos\omega t$$

強制振動解の振る舞い：

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$$

$x_0(t)$：外力がないときの減衰振動解．初期条件を担う．

$x_1(t)$：外力が作用し始めてから十分時間がたった後の解の振る舞いを与える．定常解．

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{Re}\left\{\frac{f_0}{[\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega]}\mathrm{e}^{i\omega t}\right\} \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}\,\cos(\omega t-\phi) \qquad \left[\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}\right] \\ &= \frac{f_0(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}\,\cos(\omega t) + \frac{f_0(2\gamma\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}\,\sin(\omega t) \end{aligned}$$

振幅，位相の ω 依存性：

$$A(\omega) = f_0\,\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}, \qquad \tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}$$

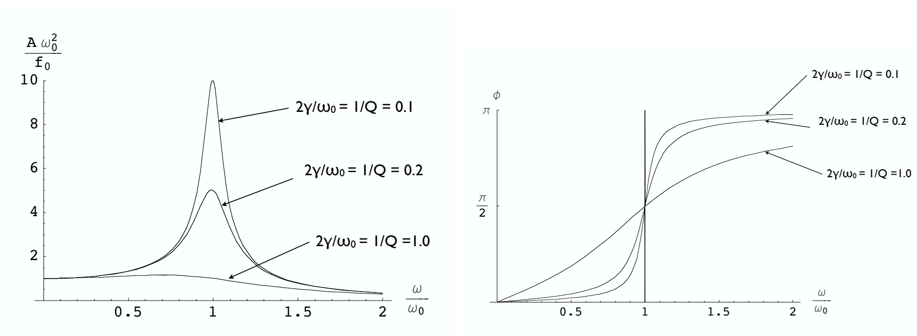

図 1: 振幅 A, 位相 ϕ

$$A_{\mathrm{el}}(\omega) = f_0\,\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}, \qquad A_{\mathrm{abs}}(\omega) = f_0\,\frac{(2\gamma\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}$$

共鳴：

- 感受率：

$$\chi(\omega) \equiv \frac{A(\omega)}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

- 外力のする仕事率：

$$\begin{aligned} P &\equiv \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\dot{x} \\ &= m f_0\,\frac{\omega}{2}\,A_{\rm abs}(\omega) \\ &= m f_0^2\,\frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} = \frac{m f_0^2}{4\gamma}\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right)^2} \end{aligned}$$

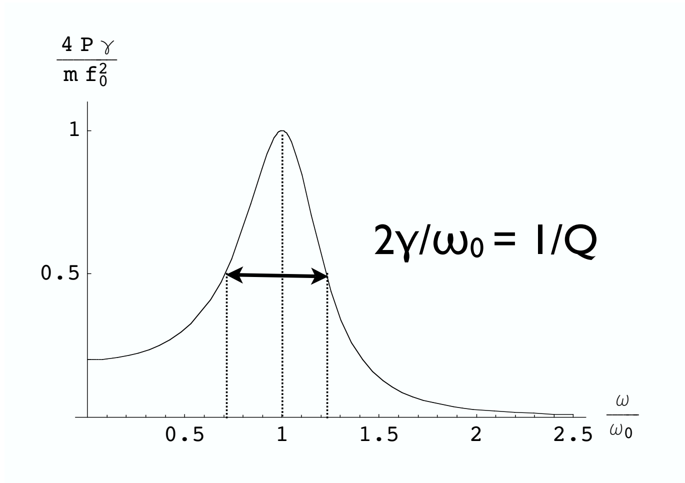

図 2: 外力のする仕事率 P

- Q 値

$$Q\,値 \equiv \frac{共鳴振動数}{半値幅} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$