問題 12-1 (振り子の減衰)

長さ 1m の糸の先におもりをつけて振り子を作る。おもりは直径 4cm の球体で，材質は鉄および発泡スチロールの 2 種類とする。それぞれ密度は 7.9×10^3 kg/m^3, 20 kg/m^3 である。空気抵抗のために振幅が 1/e に減衰するまでにかかる時間を鉄および発泡スチロールそれぞれの場合に求めよ。ただし空気の粘性係数は 1.8×10^{-5} Pa · s，重力加速度は 9.8 m/s^2 とする。

問題 12-2 (LCR 並列回路)

図 1 のように，電気容量 C のコンデンサー，自己インダクタンス L のコイル，抵抗値 R の抵抗を並列につないだ回路に交流電流 $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ を強制的に流す。次の量を求めよ。

1. 共鳴振動数 ω_0
2. 共鳴幅 2γ
3. 共鳴時のエネルギー吸収

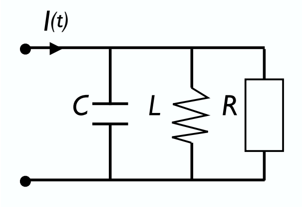

図 1: LCR 並列回路

問題 12-3 (ひもがだんだん短くなる単振り子)

おもりの質量が m，ひもの長さが l の単振り子がある。この単振り子を微小振動させながら，ひもの長さをゆっくりと短くしていく．以下の問にこたえよ．

1. ひもの長さを単位時間当たり，c(一定) だけ短くしていくものとする．すなわち，動径座標 r の時間変化を次のようにおく:
$$r = l - ct$$
このとき，おもりの運動方程式を求めよ。

2. ひもを十分ゆっくりと引っ張り上げ，r の変化がそれほど大きくならないような時間の範囲では，解はどうなるか，単振り子の振れはどのようになるか，考察せよ．

[解答例] 問題 12-1 (振り子の減衰)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{9.8} = 3.1\,\mathrm{s}^{-1}, \quad T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9.8}} = 2.0\,\mathrm{s}.$$

$$\begin{aligned}\gamma = \frac{3\pi a\eta}{m} &= 3\pi \cdot 0.02 \cdot 1.8 \times 10^{-5} \cdot \begin{cases} \frac{1}{(4\pi/3)\cdot 0.02^3 \cdot 7.9 \times 10^3} \\ \frac{1}{(4\pi/3)\cdot 0.02^3 \cdot 20} \end{cases} \\ &= 0.34 \times 10^{-5} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2.6\times 10^{-1}\,(\mathrm{kg})} \\ \frac{1}{6.7\times 10^{-4}\,(\mathrm{kg})} \end{cases} = \begin{cases} 1.3 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1} & (\text{鉄}) \\ 5.1 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1} & (\text{発砲スチロール}) \end{cases}\end{aligned}$$

$\gamma \ll \omega_0$ であるのでおもりは減衰振動する。減衰因子は $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ であるから振幅が $1/\mathrm{e}$ に減衰するまでにかかる時間は $t \simeq 1/\gamma$. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \simeq \omega_0$ と近似できるので，周期で数えれば $N \simeq t/T_0 \simeq 1/(\gamma T_0)$.

$$N \simeq 1/(\gamma T_0) = \begin{cases} 38000 & (\text{鉄}) \\ 98 & (\text{発砲スチロール}) \end{cases}$$

[解答例] 問題 12-2 (LCR 並列回路)

コンデンサー，コイル，抵抗にながれる電流を $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$ とおくと

$$I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) = I_0 \cos(\omega t). \tag{1}$$

一方，コンデンサー，コイル，抵抗での電圧降下はすべて等しくなるから，

$$-\frac{Q(t)}{C} = L\dot{I}_2(t) = I_3(t)R.$$

これらより

$$I_1(t) = -\dot{Q}(t) = LC\ddot{I}_2(t), \qquad I_3(t) = \frac{L}{R}\dot{I}_2(t).$$

これを式 (1) に代入すれば

$$LC\ddot{I}_2(t) + \frac{L}{R}\dot{I}_2(t) + I_2(t) = I_0 \cos(\omega t).$$

これを力学系の運動方程式と比べれば，$m \to LC$, $2m\gamma \to \frac{L}{R}$, $k \to 1$, $F_0 \to I_0$ の対応があることがわかる．したがって

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad 2\gamma = \frac{1}{RC}.$$

また，共鳴時のエネルギー吸収（最大値）は

$$P = \langle I(t)V(t)\rangle = \langle I(t)L\dot{I}_2(t)\rangle = L \times \frac{I_0^2}{2L/R} = \frac{1}{2}RI_0^2.$$

ここで力学系での共鳴時のエネルギー吸収（最大値）が $P = \langle F(t)\dot{x}(t)\rangle = F_0^2/(4m\gamma)$ で与えられることを用いた．

(解答例)

1. 鉛直下向きからのひもの振れ角を θ とする．ひもの張力を T とする．ひもの長さを r として，時間とともに変化することを考慮すれば，運動方程式は

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -T + mg\cos\theta \qquad (\text{動径方向}) \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) &= -mg\sin\theta \qquad (\text{角度方向}) \end{aligned}$$

$r = l - ct$ とおき，$|\theta| \ll 1$ とすれば，角度方向の運動方程式は次のように近似できる．

$$m(l - ct)\ddot{\theta} - 2mc\dot{\theta} = -mg\theta$$

すなわち

$$\ddot{\theta} - 2\frac{c}{(l-ct)}\dot{\theta} + \frac{g}{(l-ct)}\theta \quad = 0$$

2. ひもを十分ゆっくりと引っ張り上げ，r の変化がそれほど大きくならないような時間の範囲では，$r = l - ct \simeq l$ と近似できる．すなわち，

$$\ddot{\theta} - 2\frac{c}{l}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$\gamma' = \frac{c}{l}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ とおけば

$$\ddot{\theta} - 2\gamma'\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

この方程式は，速度に比例する抵抗力の働く単振り子と同型である．ただし，抵抗力の係数が負になっている点に注意する．$\gamma' < \omega_0$ とし，初期値を $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と取れば，解は次のように求まる：

$$\theta(t) = \theta_0\,\mathrm{e}^{\gamma' t}\left[\cos(\omega t) - \frac{\gamma'\theta_0}{\omega}\sin(\omega t)\right] \qquad \left(\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma'^2}\right)$$

ただし，考えている時間の範囲では，$\mathrm{e}^{\gamma' t} \simeq 1 - \gamma' t$．これより，単振り子の振れは時間とともに増加していくことがわかる．