## 問題 11-1 (複素指数関数の積，微分)

$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ とする．複素指数関数の積および微分について，次の公式が成り立つことを示せ．

$$\mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$$
$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z}$$

## 問題 11-2 (複素変数を用いた微分方程式の解法)

次の微分方程式の 3 つの独立な解を求めよ。

$$\frac{d^3}{dt^3}f(t) + f(t) = 0$$

## 問題 11-3 (双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ と複素変数)

双曲線関数

$$\cosh x \equiv \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \sinh x \equiv \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

は，指数関数 $\mathrm{e}^{x}$ $(x \in \mathbb{R})$ を複素指数関数 $\mathrm{e}^{z}$ $(z \in \mathbb{C})$ に拡張することによって，複素変数に拡張することができる．オイラーの公式を用いて，次の関係式が成り立つことを示せ．ただし，$\theta, \nu \in \mathbb{R}$.

$$\cosh(i\theta) = \cos(\theta), \qquad \sinh(i\theta) = i\sin(\theta)$$
$$\cos(i\nu) = \cosh(\nu), \qquad \sin(i\nu) = i\sinh(\nu)$$

## 問題 11-4 (過減衰)

過減衰の場合，初期条件をどのように設定しても，平衡の位置 $x = 0$ を横切ることができるのは一度きりであることを示せ。

## 問題 11-5 (空気抵抗のある場合の振り子の微小運動)

空気抵抗のある場合の振り子の微小運動を考える。初期位置 $x(0) = 0$，初速度 $\dot{x}(0) = v_0$ で振り子が動きだすときの運動を，$\omega_0 > \gamma$，$\omega_0 < \gamma$，$\omega_0 = \gamma$ の 3 通りの場合に図示せよ。

[解答例] 問題 11-1 (複素指数関数の積，微分)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2} &= \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z_1^m\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z_2^n\right) \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{1}{n!}z_1^m z_2^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{\sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{(n-k)!\,n!}z_1^{n-k}z_2^n\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z_1+z_2)^k \\
&= \mathrm{e}^{z_1+z_2}
\end{aligned}
$$

ただし，３番目の等式で $m+n=k$ とおいて，和の取り方を変更した．また，４番目の等式で２項定理

$$
(z_1+z_2)^k = \sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{(n-k)!\,n!}z_1^{n-k}z_2^n
$$

を用いた．また，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\,\mathrm{e}^z &= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d}{dz}\,z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}z^{n-1} \\
&= \mathrm{e}^z
\end{aligned}
$$

[解答例] 問題 11-2 (複素変数を用いた微分方程式の解法)

関数 $f(t)$ を複素数に拡張して $z(t)$ とする。すなわち

$$
\frac{d^3}{dt^3}z(t)+z(t)=0.
$$

$z(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ とおけば，微分方程式は次の代数方程式に帰着する:

$$
\lambda^3 = -1 = \mathrm{e}^{i\pi+i2\pi n} \quad (n\in\mathbb{Z})
$$

この代数方程式の根は

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \mathrm{e}^{i\pi/3+i2\pi n/3} \quad (n=0,1,2) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & (n=0) \\ -1 & (n=1) \\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & (n=2) \end{cases}
\end{aligned}
$$

であるので，微分方程式の３つの独立な解は

$$z(t) = \mathrm{e}^{t/2+i\frac{\sqrt{3}}{2}t}, \quad \mathrm{e}^{t/2-i\frac{\sqrt{3}}{2}t}, \quad \mathrm{e}^{-t}.$$

したがって３つの独立な実数解は

$$f(t) = \mathrm{e}^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad \mathrm{e}^{t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad \mathrm{e}^{-t}.$$

[解答例] 問題 11-3 (双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ と複素変数)

$$\begin{aligned}
\cosh(i\theta) &= \frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta)}{2} = \cos\theta \\
\sinh(i\theta) &= \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta)}{2} = i\sin\theta \\
\cos(i\nu) &= \frac{\mathrm{e}^{i(i\nu)}+\mathrm{e}^{-i(i\nu)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-\nu}+\mathrm{e}^{\nu}}{2} = \cosh\nu \\
\sin(i\nu) &= \frac{\mathrm{e}^{i(i\nu)}-\mathrm{e}^{-i(i\nu)}}{2i} = \frac{\mathrm{e}^{-\nu}-\mathrm{e}^{\nu}}{2i} = i\sinh\nu
\end{aligned}$$

## [解答例] 問題 11-4 (過減衰)

過減衰の一般解は

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[x_0 \cosh(\nu t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\nu}\sinh(\nu t)\right], \qquad \nu = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

$\mathrm{e}^{-\gamma t}\cosh(\nu t)$ は正定値関数であるから，次の関数のゼロ点を探せば十分である:

$$f(t) = 1 + \left(\frac{v_0}{x_0} + \frac{\gamma}{\nu}\right)\tanh(\nu t).$$

$\tanh(\nu t)$ は $t = 0$ でゼロで単調に増加する関数であるから，ゼロ点が存在するためには $\left(\frac{v_0}{x_0} + \frac{\gamma}{\nu}\right) < 0$ が必要である．このとき $f'(t) = \left(\frac{v_0}{x_0} + \frac{\gamma}{\nu}\right) / \cosh^2(\nu t) < 0$ であるから $f(t)$ は単調減少。したがって，たかだか 1 つのゼロ点しかありえない。

## [解答例] 問題 11-5 (空気抵抗のある場合の振り子の微小運動 (その２))

初期条件 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$ で振り子が動きだすときの運動を表す解は，以下の通り:

1. $\gamma < \omega_0$
$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\right], \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$
2. $\gamma > \omega_0$
$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[\frac{v_0}{\nu}\sinh(\nu t)\right], \qquad \nu = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$
3. $\gamma = \omega_0$
$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[v_0 t\right].$$

$\gamma = 0.5 \times \omega_0$, $\gamma = 10 \times \omega_0$, $\gamma = \omega_0$ として 3 通りの場合を図示すると