問題 4-1 (気体の自由膨張の不可逆性：Q, W の値 その２)

等温環境下で自由膨張した理想気体の状態を，問題 2-1 [方法 1]，および，[方法 3] によって元の状態に戻す．それぞれの場合に，各過程で理想気体が吸収した熱量 Q と外界にした仕事 W を求め，このサイクルにおいて，外界にどのような変化が生じているか，述べよ．

問題 4-2 (大気圧，大気温の高度変化)

空気は平均分子量 m の２原子分子の理想気体であると仮定して，以下の問に答えよ．
(久保，１章 A[8] 参照)

1. 大気圧の高度変化が次の式で与えられることを示せ．ただし，z は地表からの高度を表すものとする．
$$\frac{dp(z)}{dz} = -mgp(z)/(RT(z)). \tag{1}$$
2. 大気温の高度変化が次の式で与えられることを示せ．ただし，空気が上昇するとき，準静的に断熱膨張すると仮定してよい．
$$\frac{dT(z)}{dz} = -(\gamma - 1)mg/(\gamma R), \qquad (\gamma = c_p/c_V). \tag{2}$$
3. 高度 1 km での大気温の低下はいくらになるか，評価せよ．

問題 4-3 (微分形式の積分可能性)

微分形式 $\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$ が (ある関数の) 全微分であるための必要十分条件は
$$\frac{\partial}{\partial y}\alpha(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y)$$
が成り立つことである．これを示せ．

[解答例] 問題 4-1 (気体の自由膨張の不可逆性：Q, W の値 その２)

問題 2-1 [方法 1]：(f) → (i) の準静的等温過程では，W と Q はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
W &= RT\ln(V_1/V_2) = -RT\ln(V_1/V_2) \quad (<0) \\
Q &= RT\ln(V_1/V_2) = -RT\ln(V_1/V_2) \quad (<0)
\end{aligned}
$$

したがって，外界は正の熱量 $+RT\ln(V_1/V_2)$ を吸収して，正の仕事 $+RT\ln(V_1/V_2)$ をしたことになっている．

問題 2-1 [方法 3]：(f) → (b) → (i) の準静的断熱過程+準静的定積過程では，W と Q はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
W &= -c_V(T''-T)+0 = -c_V T\left((V_2/V_1)^{R/c_V}-1\right) \quad (<0) \\
Q &= 0 + c_V(T-T'') \quad = -c_V T\left((V_2/V_1)^{R/c_V}-1\right) \quad (<0)
\end{aligned}
$$

したがって，外界は正の熱量 $+c_V T\left((V_2/V_1)^{R/c_V}-1\right)$ を吸収して，正の仕事 $+c_V T\left((V_2/V_1)^{R/c_V}-1\right)$ をしたことになっている．

[解答例] 問題 4-2 (大気圧，大気温の高度変化)

1. 地表から z の高度にある厚さ Δz, 断面積 S の空気柱を考える．この空気柱に働く鉛直方向の力の釣り合いを表す式は以下の通り:

$$p(z)S - p(z+\Delta z)S - \rho(z)(S\Delta z)g = 0. \tag{3}$$

ただし，$\rho(z)$ は高さ z に於ける空気の密度とする．これより

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z)g. \tag{4}$$

高さ z に於ける空気の温度を $T(z)$ とすれば，$\rho(z) = mN/V = mp(z)/RT(z)$ が成り立つ．したがて

$$\frac{dp(z)}{dz} = -mg\frac{p(z)}{RT(z)}. \tag{5}$$

2. 理想気体の断熱過程では次が成り立つ:

$$pV^{R/c_V+1} = 一定, \quad TV^{R/c_V} = 一定. \tag{6}$$

これより

$$p = C\,\frac{1}{T^{1+c_V/R}} \qquad (C \text{ は定数}), \tag{7}$$

$$dp = -(1+c_V/R)C\,\frac{1}{T^{2+c_V/R}}dT = -(1+c_V/R)\frac{p}{T}dT. \tag{8}$$

これを用いて 問 (1) の結果を書き直すと，

$$\frac{dT(z)}{dz} = -mg\frac{1}{1+c_V/R}\frac{1}{R} = -mg\frac{R}{c_p}\frac{1}{R} = -mg\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1}{R}. \tag{9}$$

3. 高度差 Δz における大気温の差 ΔT は

$$\Delta T = -mg\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1}{R}\Delta z. \tag{10}$$

2 原子分子理想気体の比熱比は $c_p/c_V = 1 + R/c_V = 1 + 2/5 = 1.4$. 空気は O_2 と N_2 が混合比 23 : 77 の割合で混合している気体であることから，その平均分子量は $m = 32 \times 0.23 + 28 \times 0.77 = 28.86$ となる．これらを用いると，

$$\Delta T = -mg\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1}{R}\Delta z = -29 \times 10^{-3} \times 9.8 \times 10^3 \times \frac{0.4}{1.4} \times \frac{1}{8.3} = -9.8 \text{ [deg/km]}. \tag{11}$$

したがって，1 km 高度が上がるごとに気温は約 10° 下がることになる．

[解答例] 問題 4-3 (微分形式の積分可能性)

[必要条件] $\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$ がある関数 $u = u(x,y)$ の全微分であるとすると

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy.$$

これより

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(x,y)\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \beta(x,y)\right)dy = 0.$$

ここで微小量 dx, dy は勝手にとれるので，その係数はそれぞれゼロになるべき．したがって

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(x,y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \beta(x,y) = 0.$$

ここで $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ であるから，

$$\frac{\partial}{\partial y}\alpha(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y)$$

が成り立つ．

[十分条件] $\frac{\partial}{\partial y}\alpha(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y)$ とする．このとき $F(x,y) = \int^x \alpha(x',y)dx'$ とおくと，$\alpha(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$. これより

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}, \qquad \therefore \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta - \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0.$$

すなわち $\beta - \frac{\partial F}{\partial y}$ は x に依存しない．そこで $G(y) = \beta - \frac{\partial F}{\partial y}$ とおき，$u(x,y)$ を次のように定義する:

$$u(x,y) \equiv \int^y \beta(x,y')dy' = F(x,y) + \int^y G(y')dy'.$$

このとき

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \alpha(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \beta(x,y).$$

したがって

$$\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du.$$

すなわち $\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$ は関数 $u = u(x,y)$ の全微分になっている．