例題 5B (理想気体 Carnot サイクルの熱効率)

Carnot サイクルは (1) 等温膨張 (温度 T_2)，(2) 断熱膨張，(3) 等温収縮 (温度 T_1)，(4) 断熱収縮 の 4 過程からなる準静的なサイクル（または逆サイクル）として定義される．温度 T_2 の等温過程で体積は V_a から $V_b\,(> V_a)$ に変化するものとし，温度 T_1，T_2 の等温過程で系が吸収する熱量をそれぞれ Q_1，Q_2 と表す．

1 モルの理想気体を作業物質とする Carnot サイクルの場合に，

1. Carnot サイクルの V-p 図を描け．
2. Q_1 および Q_2 を求めよ．
3. 理想気体 Carnot サイクルの熱効率は $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ で与えられることを示せ．

(解答例)

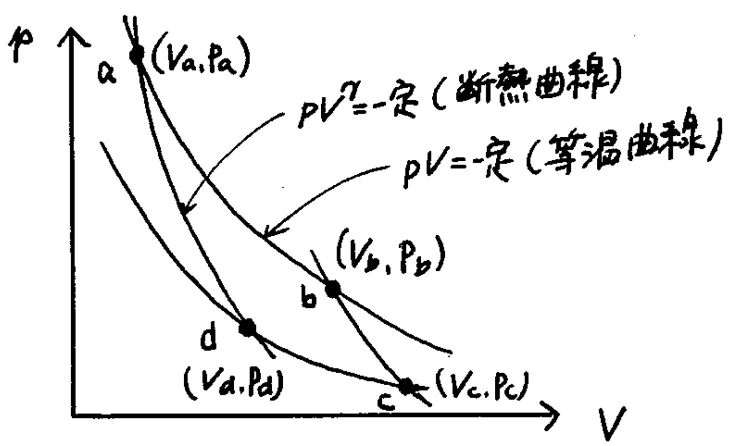
1. 温度 T_2 での等温膨張過程 (1) では，体積 V と圧力 p の関係は，状態方程式より

$$pV = RT_2 = \text{一定}$$

で与えられ，系の状態は $(V_a, p_a \equiv RT_2/V_a)$ から $(V_b, p_b \equiv RT_2/V_b)$ へ変化する．断熱膨張 (2) では，体積 V と温度 T，体積 V と圧力 p の関係はそれぞれ

$$TV^{\gamma-1} = \text{一定}, \qquad pV^{\gamma} = \text{一定}$$

となるので，系の状態は $(V_b, p_b \equiv RT_2/V_b)$ から $(V_c \equiv V_b(T_2/T_1)^{\frac{1}{\gamma-1}}, p_c \equiv (RT_2/V_b)(T_2/T_1)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}})$ へ変化する．同様にして，温度 T_1 での等温収縮過程 (3) では，系の状態は $(V_c \equiv V_b(T_2/T_1)^{\frac{1}{\gamma-1}}, p_c \equiv (RT_2/V_b)(T_2/T_1)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}})$ から $(V_d \equiv V_a(T_2/T_1)^{\frac{1}{\gamma-1}}, p_d \equiv (RT_1/V_a)(T_2/T_1)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}})$ へ変化する．このことは，断熱収縮 (4) で $(V_a, p_a \equiv RT_1/V_a)$ にもどることから確かめられる．以上の考察より，V-p 図は次のようになる．



2. 温度 T_2 での等温膨張過程 (1) では，理想気体の内部エネルギーは変化しない．熱力学第一法則より $d'Q = dU + d'W = d'W$ であるから，この過程で系が吸収する熱量 Q_2 は系がする仕事に等しい．すなわち

$$Q_2 = +\int_{V_a}^{V_b} pdV = \int_{V_a}^{V_b} \frac{RT_2}{V} dV = RT_2 \left[\ln V\right]_{V_a}^{V_b} = RT_2 \ln(V_b/V_a) \quad (> 0)$$

同様に，温度 T_1 での等温収縮過程 (3) で，系が吸収する熱量 Q_1 は系がする仕事に等しい．すなわち

$$Q_1 = +\int_{V_c}^{V_d} pdV = \int_{V_c}^{V_d} \frac{RT_1}{V} dV = RT_1 \left[\ln V\right]_{V_d}^{V_c} = RT_1 \ln(V_d/V_c)$$

ところが，問 1 の考察より $V_c/V_b = V_d/V_a$，すなわち $V_d/V_c = V_a/V_b$ となるので

$$Q_1 = -RT_1 \ln(V_b/V_a) \quad (< 0)$$

3. 問 2 の結果から，理想気体カルノーサイクルの熱効率は

$$\eta = 1 - \frac{(-Q_1)}{Q_2} = 1 - \frac{RT_1 \ln(V_b/V_a)}{RT_2 \ln(V_b/V_a)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$