例題 4B (気体の圧縮による発火)

断面積 1 cm^2 の細いガラス管に封入された温度 27°C，圧力 1 atm, 高さ 30 cm の空気柱を急激に圧縮して高さ 3cm にしたとする．この過程が断熱過程であるとして，ガラス管中の空気の温度変化を求めよ．また，この操作に必要な仕事を求めよ．

(解答例)

圧縮前の空気の温度を T_0，体積を V_0 とし，圧縮後の温度を T，体積を V とすれば，理想気体の準静的断熱変化の関係式より

$$T_0 V_0^{R/c_V} = T V^{R/c_V}. \tag{1}$$

したがって

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{R/c_V}. \tag{2}$$

また，この過程で気体がする仕事 W は次の積分で与えられる:

$$W = \int_{V_0}^{V} p dV = \int_{V_0}^{V} \frac{NRT}{V} dV = \frac{NRT_0}{V_0} \int_{V_0}^{V} \left(\frac{V_0}{V}\right)^{R/c_V+1} dV \tag{3}$$

ここで式 (2) を用いた．積分を実行すると

$$W = \frac{NRT_0}{V_0} \left[-\frac{c_V}{R} V_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{R/c_V} \right]_{V_0}^{V} = -N c_V T_0 \left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{R/c_V} - 1 \right]. \tag{4}$$

この結果は，再び式 (2) を用いて，次のように書き直すことができる:

$$W = -N c_V (T - T_0) = -U(T, V, N) + U(T_0, V_0, N). \tag{5}$$

すなわち，結果は第一法則 ($Q = 0$) と矛盾しないことが確かめられる．

空気は２原子分子の理想気体であるとする．このとき $c_V = 5/2R$ であるから, $R/c_V = 2/5 = 0.4$ となる．式 (2) および (4) より，空気の温度変化および操作に必要な仕事は以下のように求まる:

$$\Delta T = T - 300 = 300 \times \left(\frac{0.30}{0.03}\right)^{0.4} - 300 = 753.6 - 300 = 453.6\text{°C} \tag{6}$$

$$W_{\text{操作}} = -W = \frac{273}{300} \frac{30}{22.4 \times 10^3} \times \frac{5}{2} \cdot 8.31 \times (753.6 - 300) = 11.5\text{J}. \tag{7}$$