

例題 6A (理想気体のエントロピー, 断熱過程)

1. N モルの理想気体のエントロピー S を温度 T , 体積 V , モル数 N の関数として与えよ.
2. 準静的な断熱過程では次の関係式が成り立つことを示せ.

$$TV^{R/c_V} = \text{一定}, \quad pV^{R/c_V+1} = \text{一定}.$$

(解答例)

1.

$$d'Q = dU - d'W = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} dV = Nc_V dT + \frac{NRT}{V} dV$$

より

$$dS = \frac{d'Q}{T} = \frac{Nc_V}{T} dT + \frac{NR}{V} dV$$

例えば, 図 1 のような経路にそって線積分して,

$$S(T, V, N) = \int_{(V_0, T_0)}^{(V_0, T)} \frac{Nc_V}{T} dT + \int_{(V_0, T)}^{(V, T)} \frac{NR}{V} dV = Nc_V \ln(T/T_0) + NR \ln(V/V_0).$$

ここで, $a = -c_V \ln T_0 - R \ln(V_0/N)$ とおくと, a は T, V, N に依存しない定数であり, $S(T, V, N)$ は

$$S(T, V, N) = Nc_V \ln T + NR \ln(V/N) + Na$$

となる。この表式では, $S(T, V, N)$ が示量的であることが明白になっている。

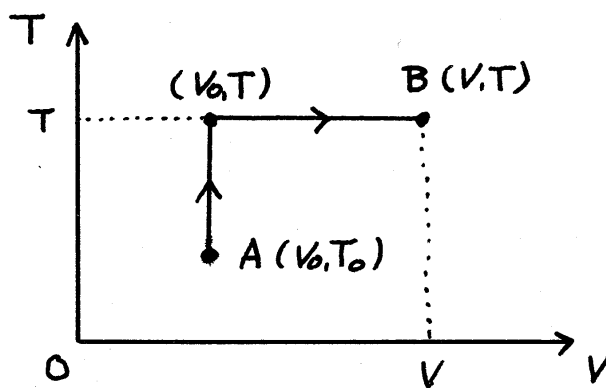


図 1: 積分経路

2. 断熱過程では $dS = \frac{1}{T} d'Q = 0$, すなわち, エントロピー一定.

$$S(T, V, N) = Nc_V \ln T + NR \ln(V/N) + Na = Nc_V \ln \left(T(V/N)^{R/c_V} \right) + Na$$

が一定であるから, $N = \text{一定}$ とすれば,

$$TV^{R/c_V} = \text{一定}$$

が従う。さらに、状態方程式を用いれば、

$$pV^{R/c_v+1} = \text{一定}$$

を得る。