

問題 4-1 (微分形式の積分可能性)

微分形式 $\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy$ が (ある関数の) 全微分であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial}{\partial y}\alpha(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\beta(x, y)$$

が成り立つことである．これを示せ．

問題 4-2 (大気圧, 大気温の高度変化)

空気は平均分子量 m の 2 原子分子の理想気体であると仮定して, 以下の問に答えよ．

(久保, 1 章 A[8] 参照)

1. 大気圧の高度変化が次の式で与えられることを示せ．ただし, z は地表からの高度を表すものとする．

$$\frac{dp(z)}{dz} = -m g p(z) / (RT(z)). \quad (1)$$

2. 大気温の高度変化が次の式で与えられることを示せ．ただし, 空気が上昇するとき, 準静的に断熱膨張すると仮定してよい．

$$\frac{dT(z)}{dz} = -(\gamma - 1) m g / (\gamma R), \quad (\gamma = c_p / c_v). \quad (2)$$

3. 高度 1 km での大気温の低下はいくらになるか, 評価せよ．

問題 4-1 (微分形式の積分可能性)

(解答例)

[必要条件] $\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy$ がある関数 $u = u(x, y)$ の全微分であるとする

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy.$$

これより

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(x, y)\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \beta(x, y)\right)dy = 0.$$

ここで微小量 dx, dy は勝手にとれるので, その係数はそれぞれゼロになるべき. したがって

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(x, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \beta(x, y) = 0.$$

ここで $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ であるから,

$$\frac{\partial}{\partial y}\alpha(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\beta(x, y)$$

が成り立つ.

[十分条件] $\frac{\partial}{\partial y}\alpha(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\beta(x, y)$ とする. このとき $F(x, y) = \int^x \alpha(x', y)dx'$ とおくと, $\alpha(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$. これより

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \therefore \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta - \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0.$$

すなわち $\beta - \frac{\partial F}{\partial y}$ は x に依存しない. そこで $G(y) = \beta - \frac{\partial F}{\partial y}$ とおき, $u(x, y)$ を次のように定義する:

$$u(x, y) \equiv \int^y \beta(x, y')dy' = F(x, y) + \int^y G(y')dy'.$$

このとき

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \alpha(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \beta(x, y).$$

したがって

$$\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du.$$

すなわち $\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy$ は関数 $u = u(x, y)$ の全微分になっている.

問題 4-2 (大気圧, 大気温の高度変化)

(解答例)

1. 地表から z の高度にある厚さ Δz , 断面積 S の空気柱を考える. この空気柱に働く鉛直方向の力の釣り合いを表す式は以下の通り:

$$p(z)S - p(z + \Delta z)S - \rho(z)(S\Delta z)g = 0. \quad (3)$$

ただし, $\rho(z)$ は高さ z に於ける空気の密度とする. これより

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z)g. \quad (4)$$

高さ z に於ける空気の温度を $T(z)$ とすれば, $\rho(z) = mN/V = mp(z)/RT(z)$ が成り立つ. したがって

$$\frac{dp(z)}{dz} = -mg \frac{p(z)}{RT(z)}. \quad (5)$$

2. 理想気体の断熱過程では次が成り立つ:

$$pV^{R/c_V+1} = \text{一定}, \quad TV^{R/c_V} = \text{一定}. \quad (6)$$

これより

$$p = C \frac{1}{T^{1+c_V/R}} \quad (C \text{ は定数}), \quad (7)$$

$$dp = -(1 + c_V/R)C \frac{1}{T^{2+c_V/R}} dT = -(1 + c_V/R) \frac{p}{T} dT. \quad (8)$$

これを用いて 問 (1) の結果を書き直すと,

$$\frac{dT(z)}{dz} = -mg \frac{1}{1 + c_V/R} \frac{1}{R} = -mg \frac{R}{c_p R} = -mg \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{R}. \quad (9)$$

3. 高度差 Δz における大気温の差 ΔT は

$$\Delta T = -mg \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{R} \Delta z. \quad (10)$$

2 原子分子理想気体の比熱比は $c_p/c_V = 1 + R/c_V = 1 + 2/5 = 1.4$. 空気は O_2 と N_2 が混合比 23 : 77 の割合で混合している気体であることから, その平均分子量は $m = 32 \times 0.23 + 28 \times 0.77 = 28.86$ となる. これらを用いると,

$$\Delta T = -mg \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{R} \Delta z = -29 \times 10^{-3} \times 9.8 \times 10^3 \times \frac{0.4}{1.4} \times \frac{1}{8.3} = -9.8 \text{ [deg/km]}. \quad (11)$$

したがって, 1 km 高度が上がるごとに気温は約 10° 下がることになる.