問題 5-1 (断熱線の交叉)

ある気体の二つの断熱曲線が交わるとすると、熱力学第二法則に矛盾することを示せ。

(久保, 2 章 A[3] 参照)

問題 5-2 (Plank の原理)

次の Plank の原理を Thomson の原理から導出せよ.
「摩擦により熱が発生する現象は不可逆である.」

問題 5-3 (Carathéodory の原理)

次の Carathéodory の原理を Thomson の原理から導出せよ. (久保, 2 章 B[30] 参照)
「熱的に一様な系の任意の熱平衡状態の任意の近傍に, その状態から断熱変化によって到達できない他の状態が必ず存在する.」

問題 5-4 (一般の熱機関の効率)

複数の熱源の間で働く熱機関が, 正の熱量を吸収する熱源の最高温度を $T_{\max}$, 正の熱量を放出する熱源の最低温度を $T_{\min}$ とすれば, その熱機関の効率 η は次をみたすことを示せ.

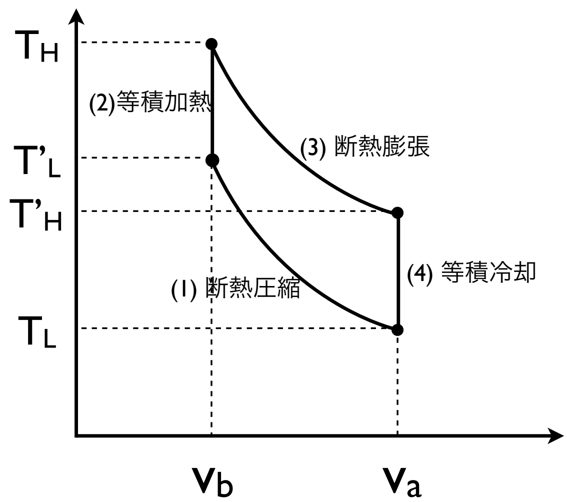
$$\eta \leq 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$$

問題 5-5 (Otto サイクルの効率)

ガソリンエンジンの動作を模倣して作られた Otto サイクルは (1) 断熱圧縮, (2) 定積加熱, (3) 断熱膨張, (4) 定積冷却の 4 過程からなる準静的なサイクルとして定義される. 作業物質を理想気体とし, 温度 T_L, 体積 V_a の状態から (1) 断熱圧縮および (2) 定積加熱によって, 温度 T_H, 体積 V_b の状態になるものとすると, Otto サイクルの効率 η は次の関係式を満たすことを示せ.

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{R/c_V} \leq 1 - \frac{T_L}{T_H}$$

Otto サイクルの VT 図は次の通り:



問題 5-1 (断熱線の交叉)

(解答例)

V-p 図上で，二つの断熱線と異なる 2 点で交わる一つの等温線を考えて，等温線にそって気体を膨張させる向きにサイクルを考える．系が外界から受け取る熱量は等温過程におけるもの Q のみである．一方，系が外界にする仕事 W はサイクルによって囲まれる領域の面積で与えられ，明らかに正の量である．熱力学第一法則から $Q = W > 0$ となる．この結果は，一つの熱源から得た熱量 Q をすべて正の仕事 $W > 0$ にかえ，系自身は元の状態に戻ったことを意味している．これは熱力学第二法則（Thomson の原理）に矛盾する．

問題 5-2 (Plank の原理)

(解答例)

はじめに Thomson の原理が偽であると仮定する．このとき，摩擦によって発生した熱量 Q を全て仕事 W に変換することが可能である．この仕事 W によって，摩擦熱を発生させるために用いた力学系の状態を完全にもとに戻すことができる．したがって，Plank の原理は偽である．

逆に，Plank の原理が偽であると仮定する．このとき，ある一定の温度の熱源から吸収した熱量 Q を，摩擦熱発生の逆過程によって，全て仕事 W に変換することが可能である．結果として，一様な温度をもつ 1 つの熱源から熱を吸収し，それをすべて仕事に変換するだけで，他に何の変化も残さない過程が実現できる．したがって，Thomson の原理は偽である．

以上の議論から，Plank の原理は Thomson の原理が成り立つための必要十分条件であることがわかる．

問題 5-3 (Carathéodory の原理)

(解答例)

Carathéodory の原理が偽であると仮定する．今，系の状態を等温的に状態 1 から状態 2 に変換し，この間に正の熱量 Q を吸収させる．このとき，系がする仕事を W とすれば，熱力学第一法則より，

$$Q = U_2 - U_1 + W > 0.$$

ここで，Carathéodory の原理が偽であることから，系の状態を状態 2 からもとの状態 1 まで断熱的に変換することが必ずできる．このとき，系がする仕事を W' とすれば，熱力学第一法則より，

$$0 = U_1 - U_2 + W'.$$

この一連の操作からなるサイクルにおいて次が成り立つ:

$$Q = W - W' > 0.$$

すなわち， 一様な温度をもつ 1 つの熱源から正の熱量を吸収し，それをすべて仕事に変換するだけで，他に何の変化も残さない過程が実現できる．したがって，Thomson の原理は偽である．

以上の議論から，Thomson の原理が成り立てば，Carathéodory の原理が成り立つことがわかる．

問題 5-4 (一般の熱機関の効率)

(解答例)

熱機関が，そのサイクルにおいて，温度 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ の熱源から，それぞれ，熱量 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ を正味吸収するならば，クラウジウスの不等式より

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \tag{1}$$

が成り立っている。ここで，$Q_i > 0$ となる熱源は k_+ 個あり，$Q_i < 0$ となる熱源は k_- 個あるとし，それぞれ，添字 $i_+ \,(= 1, \cdot, k_+)$，および，$i_- \,(= 1, \cdots, k_-)$ を用いて区別することにすれば，クラウジウスの不等式は次のように表すことができる：

$$\sum_{i_+=1}^{k_+} \frac{Q_{i_+}}{T_{i_+}} \leq \sum_{i_-=1}^{k_-} \frac{|Q_{i_-}|}{T_{i_-}} \tag{2}$$

また，T_{i_+} $(i_+ \,(= 1, \cdot, k_+))$ の中の最大値が $T_{\max}$ であり，T_{i_-} $(i_- \,(= 1, \cdot, k_-))$ の中の最小値が $T_{\min}$ であるから，T_{i_+} をすべて $T_{\max}$ で置き換え，T_{i_-} をすべて $T_{\min}$ に置き換えれば，さらに，

$$\frac{\sum_{i_+=1}^{k_+} Q_{i_+}}{T_{\max}} < \frac{\sum_{i_-=1}^{k_-} |Q_{i_-}|}{T_{\min}} \tag{3}$$

を得る。

一方，熱機関が吸収する熱量 $Q_+ (> 0)$，および，放出する熱量 $Q_- (> 0)$ は，それぞれ，

$$\begin{aligned} Q_+ &= \sum_{i_+=1}^{k_+} Q_{i_+}, \\ Q_- &= \sum_{i_-=1}^{k_-} |Q_{i_-}| \end{aligned} \tag{4}$$

によって与えられるから，この熱機関の効率は，

$$\eta = 1 - \frac{\sum_{i_-=1}^{k_-} |Q_{i_-}|}{\sum_{i_+=1}^{k_+} Q_{i_+}} \tag{5}$$

となる。したがって，式 (3) から

$$\eta = 1 - \frac{\sum_{i_-=1}^{k_-} |Q_{i_-}|}{\sum_{i_+=1}^{k_+} Q_{i_+}} < 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \tag{6}$$

が成り立つことがわかる。

問題 5-5 (Otto サイクルの効率)

(解答例)

1 モルの理想気体を作業物質とする Otto サイクルを考える．断熱圧縮 (1) の過程で系の温度は T_L から $T'_L = T_L (V_a/V_b)^{R/c_V}$ になる．定積加熱 (2) の過程で系が吸収する熱量 Q_1 は

$$Q_1 = c_V (T_H - T'_L) = c_V \left(T_H - T_L (V_a/V_b)^{R/c_V} \right).$$

断熱膨張 (3) の過程で系の温度は T_H から $T'_H = T_H(V_b/V_a)^{R/c_V}$ になる．定積冷却 (4) の過程で系が吸収する熱量 Q_2 は

$$Q_2 = c_V(T'_H - T_L) = c_V\left(T_L - T_H(V_b/V_a)^{R/c_V}\right).$$

これより，Otto サイクルの熱効率は

$$\eta = 1 - \frac{(-Q_2)}{Q_1} = 1 - \frac{T_H(V_b/V_a)^{R/c_V} - T_L}{T_H - T_L(V_a/V_b)^{R/c_V}} = 1 - (V_b/V_a)^{R/c_V}.$$

あるいは

$$\eta = 1 - \frac{T'_H}{T_H} = 1 - \frac{T_L}{T'_L}.$$

これより，次が成り立つ:

$$\eta = 1 - \frac{T'_H}{T_H} = 1 - \frac{T_L}{T_H}\frac{T'_H}{T_L} \leq 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$