

例題 5C (クラウジウスの不等式)

熱機関が 1 サイクルの間に温度 $T_1, T_2, \dots, T_k$ の熱源からそれぞれ $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ の熱量を吸収するものとすれば,

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_k}{T_k} = \sum_{i=1}^k \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(解答例)

温度 T_0 ($< T_i; i = 1, \dots, k$) の熱源を導入する. 各 $i = 1, \dots, k$ について, 温度 T_i の熱源と温度 T_0 の熱源の間に逆向きに可逆機関を働かせる. このとき, 温度 T_i の熱源から吸収する熱量が $-Q_i$ になるようにすれば, 温度 T_0 の熱源から吸収される熱量 $Q_0^{(i)}$ は

$$\frac{(-Q_0^{(i)})}{(-Q_i)} = \frac{T_0}{T_i} \quad \therefore \quad Q_0^{(i)} = \frac{T_0}{T_i} Q_i$$

もとの熱機関と k 個の可逆機関を合成した熱機関では, 各 $i = 1, \dots, k$ について, 温度 T_i の熱源から吸収した熱量はゼロになっており, 温度 T_0 の熱源が吸収した熱量は

$$\sum_{i=1}^k Q_0^{(i)} = \sum_{i=1}^k \frac{Q_i}{T_i} T_0$$

となる. この値は, 熱力学第一法則から, 合成熱機関が 1 サイクルの間に行う仕事 W に等しい. もし, W が正であるとトムソンの原理に矛盾するから

$$W = \sum_{i=1}^k Q_0^{(i)} = \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{Q_i}{T_i} \right\} T_0 \leq 0$$

でなければならない. したがって題意が従う.