

問題 3-1 (熱の仕事当量)

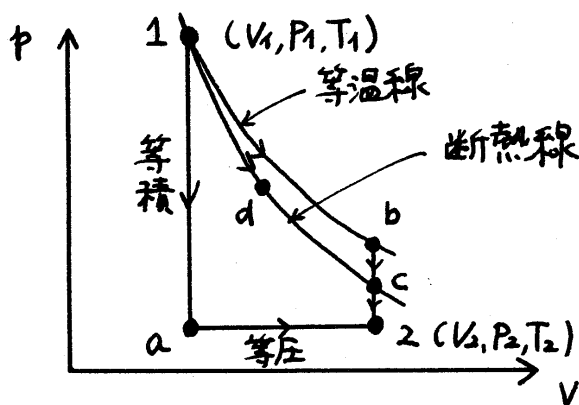
1 g の水の温度を 1°K 上昇させるために要する熱量 (1 cal) は, 1 g の水を重力 (地表付近) に抗して何 m 持ち上げるエネルギーに対応するか.

問題 4-1 (準静的断熱過程における仕事と内部エネルギー変化)

準静的断熱過程で理想気体を状態 1 : (T_1, V_1, N) から状態 2 : (T_2, V_2, N) へ変化させる. このとき気体が行う仕事を適当な方法で熱に変え, 状態 2 にある気体に体積を一定に保って与えると, 気体の温度は, はじめの温度 T_1 にもどることを示せ. (久保, 1 章 A[6] 参照)

問題 4-2 (いろいろな準静的過程における W, Q)

1 モルの理想気体の状態を, 状態 (V_1, p_1, T_1) から状態 (V_2, p_2, T_2) へ, 図のような 3 通りの準静的過程 (1) $1 \rightarrow a \rightarrow 2$, (2) $1 \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow 2$, (3) $1 \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow 2$ で変化させる. 各過程について, 系が外界にする仕事 W , 系が吸収する熱量 Q を求めよ.



問題 4-3 (大気圧, 大気温の高度変化)

空気は平均分子量 m の 2 原子分子の理想気体であると仮定して, 以下の問に答えよ. (久保, 1 章 A[8] 参照)

1. 大気圧の高度変化が次の式で与えられることを示せ. ただし, z は地表からの高度を表すものとする.

$$\frac{dp(z)}{dz} = -m g p(z) / (R T(z)). \quad (1)$$

2. 大気温の高度変化が次の式で与えられることを示せ. ただし, 空気が上昇するとき, 準静的に断熱膨張すると仮定してよい.

$$\frac{dT(z)}{dz} = -(\gamma - 1) m g / (\gamma R), \quad (\gamma = c_p / c_v). \quad (2)$$

3. 高度 1 km での大気温の低下はいくらになるか, 評価せよ.

問題 4-4 (微分形式の積分可能性)

微分形式 $\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy$ が (ある関数の) 全微分であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial}{\partial y}\alpha(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\beta(x, y)$$

が成り立つことである。これを示せ。

問題 3-1 (熱の仕事当量)

(解答例)

$$Q = Jq = mgl, \quad \therefore l = \frac{Jq}{mg} = \frac{4.18 \cdot 1.0}{1.0 \times 10^{-3} \cdot 9.8} = 426\text{m}.$$

問題 4-1 (準静的断熱過程における仕事と内部エネルギー変化)

(解答例)

理想気体の内部エネルギーは温度のみの関数であるから、

$$U = U(T).$$

$U(T)$ は T に関して単調増加関数であるとする. (これは定積比熱 c_V が正であると仮定することに等しい.) このとき、内部エネルギーの値が決まれば、温度が一意的に決まる.

状態 1 から状態 2 への準静的断熱過程で理想気体がする仕事は、熱力学第一法則から内部エネルギーの変化の逆符号に等しい. この仕事 W は

$$W = -(U(T_2) - U(T_1)).$$

この仕事をすべて熱に変換して、状態 2 に、体積を一定に保って与えると、理想気体の内部エネルギーは

$$U = U(T_2) + Q = U(T_2) - (U(T_2) - U(T_1)) = U(T_1)$$

となる. 従って、理想気体の温度は T_1 に戻っている.

問題 4-2 (いろいろな準静的過程における $W, Q: \Delta U$ の経路依存性)

(解答例)

(1) $1 \rightarrow a \rightarrow 2$:

$a \rightarrow 2$ は等圧過程であるから

$$p_2 = \frac{RT_a}{V_1} = \frac{RT_2}{V_2}, \quad \therefore T_a = \frac{V_1}{V_2} T_2$$

$1 \rightarrow a \rightarrow 2$ における W と Q はそれぞれ

$$\begin{aligned} W &= 0 + p_2(V_2 - V_1) = +RT_2 \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) \\ Q &= c_V \left(\frac{V_1}{V_2} T_2 - T_1\right) + (c_V + R) \left(T_2 - \frac{V_1}{V_2} T_2\right) \\ &= c_V(T_2 - T_1) + RT_2 \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) \end{aligned}$$

(2) $1 \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow 2$:

$1 \rightarrow b$ は等温過程であるから

$$T_b = T_1.$$

$1 \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow 2$ における W と Q はそれぞれ

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V} dV + 0 = RT_1 \log(V_2/V_1) \\ Q &= \{\Delta U + W\}_{1 \rightarrow b} + c_V(T_2 - T_1) = RT_1 \log(V_2/V_1) + c_V(T_2 - T_1) \end{aligned}$$

(3) $1 \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow 2$:

$1 \rightarrow d \rightarrow c$ は断熱過程であるから

$$T_1 V_1^{R/c_V} = T V^{R/c_V} = T_c V_2^{R/c_V}, \quad \therefore T = T_1 \left(\frac{V_1}{V} \right)^{R/c_V}, \quad T_c = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{R/c_V}$$

$1 \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow 2$ における W と Q はそれぞれ

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV + 0 \\ &= RT_1 V_1^{R/c_V} \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V \cdot V^{R/c_V}} dV = RT_1 V_1^{R/c_V} \left[-\frac{1}{R/c_V} V^{-R/c_V} \right]_{V_1}^{V_2} = c_V T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{R/c_V} \right] \\ Q &= 0 + c_V [T_2 - T_c] = c_V \left[T_2 - T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{R/c_V} \right] \end{aligned}$$

注) (1), (2), (3) いずれの場合も $Q - W = c_V(T_2 - T_1)$ となっており, 1モルの理想気体の内部エネルギーの変化 $\Delta U = c_V T_2 - c_V T_1$ に等しくなっている.

問題 4-3 (大気圧, 大気温の高度変化)

(解答例)

1. 地表から z の高度にある厚さ Δz , 断面積 S の空気柱を考える. この空気柱に働く鉛直方向の力の釣り合いを表す式は以下の通り:

$$p(z)S - p(z + \Delta z)S - \rho(z)(S\Delta z)g = 0. \quad (3)$$

ただし, $\rho(z)$ は高さ z に於ける空気の密度とする. これより

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z)g. \quad (4)$$

高さ z に於ける空気の温度を $T(z)$ とすれば, $\rho(z) = mN/V = mp(z)/RT(z)$ が成り立つ. したがって

$$\frac{dp(z)}{dz} = -mg \frac{p(z)}{RT(z)}. \quad (5)$$

2. 理想気体の断熱過程では次が成り立つ:

$$pV^{R/c_V+1} = \text{一定}, \quad TV^{R/c_V} = \text{一定}. \quad (6)$$

これより

$$p = C \frac{1}{T^{1+c_V/R}} \quad (C \text{ は定数}), \quad (7)$$

$$dp = -(1 + c_V/R)C \frac{1}{T^{2+c_V/R}} dT = -(1 + c_V/R) \frac{p}{T} dT. \quad (8)$$

これを用いて 問 (1) の結果を書き直すと,

$$\frac{dT(z)}{dz} = -mg \frac{1}{1 + c_V/R} \frac{1}{R} = -mg \frac{R}{c_p} \frac{1}{R} = -mg \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{R}. \quad (9)$$

3. 高度差 Δz における大気温の差 ΔT は

$$\Delta T = -mg \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{R} \Delta z. \quad (10)$$

2 原子分子理想気体の比熱比は $c_p/c_V = 1 + R/c_V = 1 + 2/5 = 1.4$. 空気は O_2 と N_2 が混合比 23 : 77 の割合で混合している気体であることから, その平均分子量は $m = 32 \times 0.23 + 28 \times 0.77 = 28.86$ となる. これらを用いると,

$$\Delta T = -mg \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{R} \Delta z = -29 \times 10^{-3} \times 9.8 \times 10^3 \times \frac{0.4}{1.4} \times \frac{1}{8.3} = -9.8 \text{ [deg/km]}. \quad (11)$$

したがって, 1 km 高度が上がるごとに気温は約 10° 下がることになる.

問題 4-4 (微分形式の積分可能性)

(解答例)

[必要条件] $\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy$ がある関数 $u = u(x, y)$ の全微分であるとする

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy.$$

これより

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(x, y) \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \beta(x, y) \right) dy = 0.$$

ここで微小量 dx, dy は勝手にとれるので, その係数はそれぞれゼロになるべき. したがって

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(x, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \beta(x, y) = 0.$$

ここで $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ であるから,

$$\frac{\partial}{\partial y} \alpha(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \beta(x, y)$$

が成り立つ.

[十分条件] $\frac{\partial}{\partial y} \alpha(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \beta(x, y)$ とする. このとき $F(x, y) = \int^x \alpha(x', y) dx'$ とおくと, $\alpha(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$. これより

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \therefore \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta - \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0.$$

すなわち $\beta - \frac{\partial F}{\partial y}$ は x に依存しない. そこで $G(y) = \beta - \frac{\partial F}{\partial y}$ とおき, $u(x, y)$ を次のように定義する:

$$u(x, y) \equiv \int^x \alpha(x', y) dx' + \int^y G(y') dy'.$$

このとき

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \alpha(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \beta(x, y).$$

したがって

$$\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du.$$

すなわち $\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy$ は関数 $u = u(x, y)$ の全微分になっている.