

例題 4B (気体の断熱変化, Poisson の関係式)

1. 理想気体の準静的断熱過程において成り立つ温度 T と体積 V の関係を求めよ.
 2. 断面積 1 cm^2 の細いガラス管に封入された温度 27°C , 圧力 1 atm , 高さ 30 cm の空気柱を急激に圧縮して高さ 3 cm にしたとする. この過程が断熱過程であるとして, ガラス管中の空気の温度変化を求めよ. また, この操作に必要な仕事を求めよ.
-

(解答例)

1. (無限小の) 準静的断熱変化では, $d'Q = 0$. したがって, 第一法則より

$$dU + pdV = 0. \quad (1)$$

理想気体の場合, 内部エネルギー $U(T, V, N) = Nc_V T + U_0$, および, 状態方程式 $pV = NRT$ を用いると,

$$Nc_V dT + \frac{NRT}{V} dV = 0. \quad (2)$$

両辺を T で割って

$$\frac{1}{T} dT + \frac{R}{c_V} \frac{1}{V} dV = d \left(\ln T + \frac{R}{c_V} \ln V \right) = 0. \quad (3)$$

この両辺を積分すれば

$$\ln T + \frac{R}{c_V} \ln V = \ln(TV^{R/c_V}) = (\text{定数}). \quad (4)$$

したがって, 温度 T と体積 V の関係として次を得る:

$$TV^{R/c_V} = (\text{定数}). \quad (5)$$

さらに, 状態方程式 より $T = pV/NR$ を用いれば, 圧力 p と体積 V の関係として次を得る:

$$pV^{R/c_V+1} = PV^{c_p/c_V} = (\text{定数}). \quad (6)$$

この結果は Poisson の関係式とよばれる. c_p/c_V は比熱比とよばれる量であり, γ と記される.

2. 圧縮前の空気の温度を T_0 , 体積を V_0 とし, 圧縮後の温度を T , 体積を V とすれば, 理想気体の準静的断熱変化の関係式より

$$T_0 V_0^{R/c_V} = TV^{R/c_V}. \quad (7)$$

したがって

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{R/c_V}. \quad (8)$$

また、この過程で気体が行う仕事 W は次の積分で与えられる:

$$W = \int_{V_0}^V p dV = \int_{V_0}^V \frac{NRT}{V} dV = \frac{NRT_0}{V_0} \int_{V_0}^V \left(\frac{V_0}{V} \right)^{R/c_V+1} dV \quad (9)$$

ここで式 (8) を用いた、積分を実行すると

$$W = \frac{NRT_0}{V_0} \left[-\frac{c_V}{R} V_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{R/c_V} \right]_{V_0}^V = -Nc_V T_0 \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^{R/c_V} - 1 \right]. \quad (10)$$

この結果は、再び式 (8) を用いて、次のように書き直すことができる:

$$W = -Nc_V(T - T_0) = -U(T, V, N) + U(T_0, V_0, N). \quad (11)$$

すなわち、結果は第一法則 ($Q = 0$) と矛盾しないことが確かめられる。

空気は2原子分子の理想気体であるとする。このとき $c_V = 5/2R$ であるから、 $R/c_V = 2/5 = 0.4$ となる。式 (8) および (10) より、空気の温度変化および操作に必要な仕事は以下のように求まる:

$$\Delta t = T - 300 = 300 \times \left(\frac{0.30}{0.03} \right)^{0.4} - 300 = 753.6 - 300 = 453.6^\circ\text{C} \quad (12)$$

$$W_{\text{操作}} = -W = \frac{273}{300} \frac{30}{22.4 \times 10^3} \times \frac{5}{2} \cdot 8.31 \times (753.6 - 300) = 11.5\text{J}. \quad (13)$$