問題 5-1 (van der Waals 気体 Carnot サイクルの効率)

van der Waals 気体を作業物質とする Carnot サイクルの効率を計算せよ．ただし，気体の定積比熱 c_V は温度によらず，定数とする．

問題 5-2 (Otto サイクルの効率)

ガソリンエンジンの動作を模倣して作られた Otto サイクルは (1) 断熱圧縮，(2) 定積加熱，(3) 断熱膨張，(4) 定積冷却の４過程からなる準静的なサイクルとして定義される．作業物質を理想気体とし，温度 T_L，体積 V_a の状態から (1) 断熱圧縮および (2) 定積加熱によって，温度 T_H，体積 V_b の状態になるものとすると，Otto サイクルの効率 η は次の関係式を満たすことを示せ．

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{R/c_V} \leq 1 - \frac{T_L}{T_H}$$

問題 5-3 (スターリングエンジンの効率の評価)

スターリングエンジンの動作を近似的に表現するような準静的なサイクルを考えよ．作業物質を理想気体とすることで，スターリングエンジンの効率を評価してみよ．

参考文献：大人の科学マガジン vol. 10, 学研

問題 5-1 (van der Waals 気体 Carnot サイクルの効率)

(解答例)

１モルの van der Waals 気体を作業物質とする Carnot サイクルを考える．１モルの van der Waals 気体の状態方程式，内部エネルギーは次で与えられる:

$$p = \frac{RT}{(V-b)} - \frac{a}{V^2},$$
$$U = c_V T - \frac{a}{V} + U_0.$$

温度 T_1 での等温膨張過程 (1) で系が吸収する熱量 Q_1，温度 T_2 での等温収縮過程 (3) で系が吸収する熱量 Q_2 は，それぞれ,

$$\begin{aligned} Q_1 &= (U_b - U_a) + \int_{V_a}^{V_b} p dV \\ &= -a\left(\frac{1}{V_b} - \frac{1}{V_a}\right) + \left[RT_1 \ln(V-b) + \frac{a}{V}\right]_{V_a}^{V_b} \\ &= RT_1 \ln[(V_b - b)/(V_a - b)], \\ Q_2 &= RT_2 \ln[(V_d - b)/(V_c - b)]. \end{aligned}$$

一方，断熱膨張 (3)，断熱収縮 (4) では，体積 V と温度 T の関係は

$$T(V-b)^{R/c_V} = 一定$$

となるから,

$$\frac{(V_b - b)}{(V_c - b)} = \frac{(V_a - b)}{(V_d - b)} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{-c_V/R},$$

あるいは

$$\frac{(V_b - b)}{(V_a - b)} = \frac{(V_c - b)}{(V_d - b)}.$$

これより

$$\eta = 1 - \frac{(-Q_2)}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}\frac{\ln[(V_c - b)/(V_d - b)]}{\ln[(V_b - b)/(V_a - b)]} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

問題 5-2 (Otto サイクルの効率)

(解答例)

１モルの理想気体を作業物質とする Otto サイクルを考える．断熱圧縮 (1) の過程で系の温度は T_L から $T'_L = T_L(V_a/V_b)^{R/c_V}$ になる．定積加熱 (2) の過程で系が吸収する熱量 Q_1 は

$$Q_1 = c_V(T_H - T'_L) = c_V\left(T_H - T_L(V_a/V_b)^{R/c_V}\right).$$

断熱膨張 (3) の過程で系の温度は T_H から $T'_H = T_H(V_b/V_a)^{R/c_V}$ になる．定積冷却 (4) の過程で系が吸収する熱量 Q_2 は

$$Q_2 = c_V(T'_H - T_L) = c_V\left(T_L - T_H(V_b/V_a)^{R/c_V}\right).$$

これより，Otto サイクルの熱効率は

$$\eta = 1 - \frac{(-Q_2)}{Q_1} = 1 - \frac{T_H(V_b/V_a)^{R/c_V} - T_L}{T_H - T_L(V_a/V_b)^{R/c_V}} = 1 - (V_b/V_a)^{R/c_V}.$$

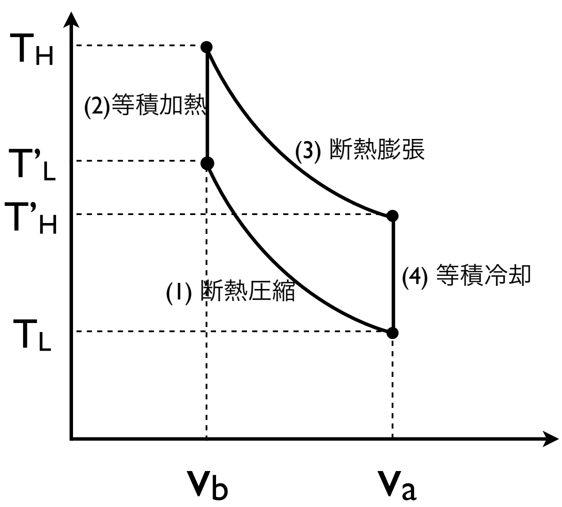
あるいは

$$\eta = 1 - \frac{T'_H}{T_H} = 1 - \frac{T_L}{T'_L}.$$

これより，次が成り立つ:

$$\eta = 1 - \frac{T'_H}{T_H} = 1 - \frac{T_L}{T_H}\frac{T'_H}{T_L} \le 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

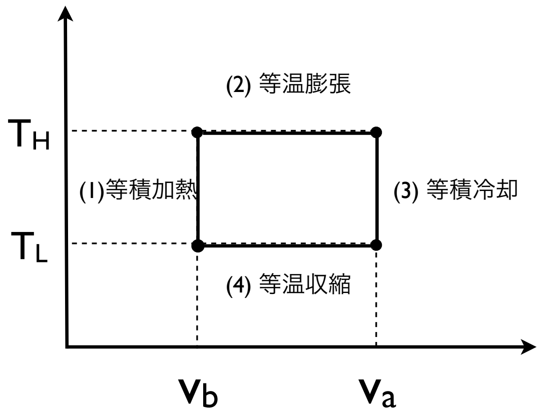
Otto サイクルの $V - T$ 図は次の通り:

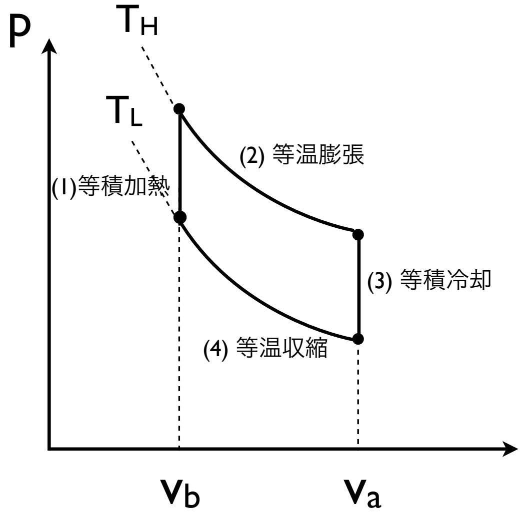


問題 5-3 (スターリングエンジンの効率の評価)

(解答例)

Stirling エンジンの動作を模倣する 準静的なサイクルとして，(1) 定積加熱，(2) 等温膨張，(3) 定積冷却，(4) 等温収縮の４過程からなる Stirling サイクルを定義する．$V-T$ 図，$V-p$ 図は以下の通り:





１モルの理想気体を作業物質とする Stirling サイクルを考える．定積加熱 (1)，等温膨張 (2) の過程で系が吸収する熱量 Q_1 は

$$Q_1 = c_V(T_H - T_L) + RT_H \ln(V_b/V_a).$$

定積冷却 (3)，等温収縮 (4) の過程で系が吸収する熱量 Q_2 は

$$Q_2 = c_V(T_L - T_H) + RT_L \ln(V_a/V_b).$$

これより，Stirling サイクルの熱効率は

$$\begin{aligned}
\eta &= 1 - \frac{(-Q_2)}{Q_1} \\
&= 1 - \frac{c_V(T_H - T_L) + RT_L \ln(V_b/V_a)}{c_V(T_H - T_L) + RT_H \ln(V_b/V_a)} \\
&= \frac{T_H - T_L}{T_H + (T_H - T_L)(c_V/R)/\ln(V_b/V_a)} \\
&= \left(1 - \frac{T_L}{T_H}\right) \Big/ \left[1 + \frac{(1 - T_L/T_H)}{(R/c_V)\ln(V_b/V_a)}\right].
\end{aligned}$$

$T_L = 300\mathrm{K}$，$T_H = 360\mathrm{K}$，$R/c_V = 0.4$ (空気 (２原子分子) の場合)，$\ln V_b/V_a \simeq (V_b - V_a)/V_b = 1/10$ として

$$\eta = \frac{60}{360 + 60/0.04} = 0.032.$$