

# 第5章 完全直交関数系、Fourier 級数、及び Fourier 解析

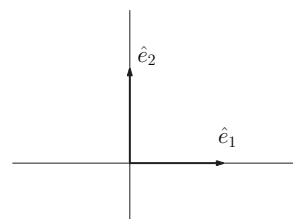
## 波動の系統的な扱い

前章では、1次元の波動方程式の一般解および高次元の球面波解を求めたが、より一般の波動を系統的に取り扱うには、波動を表す関数を基本的な関数(波動)の一次結合(積分を含む)として表すことが強力な方法を与える。この方法を理解することは、波動についての理解を深めるためのみならず、物理に現れる様々な線形(偏)微分方程式を解く為にも非常に重要である。この根底にあるのは、あるクラスの関数の全体は内積の入った(無限次元)ベクトル空間をなすという事実である。特に、そのベクトル空間としての基底を三角関数、あるいは指数関数にとることができるが、これから Fourier 級数、Fourier 積分の概念が生ずる<sup>1</sup>。

## 5.1 ベクトル空間の完全直交基底

この節では、有限次元のベクトル空間の直交基底、及びその捉え方について述べる。

簡単のためまず二次元のベクトル空間を考える。図のように  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  を正規直交基底とすると、任意のベクトル  $\vec{u}$  は  $\vec{u} = u_1\hat{e}_1 + u_2\hat{e}_2$  と書け、 $u_1, u_2$  は、ベクトル  $\vec{u}$  の、基底  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$  に関する成分と呼ばれる。



<sup>1</sup>Fourier 級数は歴史的には 19 世紀初頭の Fourier による熱伝導方程式の研究で編み出された。物質が局所的な熱平衡にあるとき、温度は位置と時間の関数  $T(\vec{x}, t)$  になる。そして温度に空間的な勾配があると、それに比例した熱流  $\vec{J} = -\lambda \vec{\nabla} T$  が生ずる ( $\lambda$  は熱伝導率)。このとき、熱エネルギーの保存則は、熱エネルギー密度を  $\rho_E(\vec{x}, t) = C_V T(\vec{x}, t)$  として ( $C_V$  は定積比熱)  $\partial \rho_E / \partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  と書けるが、これは  $T$  に対して  $\partial T / \partial t = (\lambda / C_V) \nabla^2 T = (\lambda / C_V) (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2) T$  なる熱伝導方程式 (または拡散方程式) を与える。これを解くのに Fourier はこの章で詳述する Fourier 級数を用いた。

以下  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  の様な成分表示を用いる。(ベクトル記号は省略する。)  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  に対応する成分表示のベクトルを  $\phi_1, \phi_2$  と書くことにする。すなわち、

$$\hat{e}_1 \leftrightarrow \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 \leftrightarrow \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u$  の展開は

$$u = \sum_{i=1}^2 u_i \phi_i = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

この実ベクトル空間には  $(u, v) = \sum_i u_i v_i$  なる通常の内積が定義されているが、複素ベクトル空間の場合も含めて内積の一般的な定義を述べておく。

□ 複素ベクトル空間の内積の定義:

ベクトル空間  $\mathcal{V}$  の二つのベクトル  $u, v$  に対して、次の三つの性質を満たすような複素数  $(u, v)$  が一意に与えられるときこれを正値エルミート内積と呼ぶ。

1. 正値性 :  $\forall v \in \mathcal{V} \quad (v, v) \geq 0$ 。等号は  $v = 0$  の時のみ。
2. 線形性 : For  $u, v, w \in \mathcal{V}$ ,  $(u, av + bw) = a(u, v) + b(u, w)$
3. 対称性 :  $(u, v) = (v, u)^*$  ここで  $*$  は複素共役の意。従って、線形性と合わせると  $(au, v) = a^*(u, v)$  となることに注意。実ベクトル空間の場合には無論  $*$  は要らない。

正規直交基底に対する成分を用いて

$$(u, v) \equiv \sum_i u_i^* v_i = u^\dagger v \quad (5.1)$$

と定義すると、これらの性質を満たす。

---

演習 5.1 これを確かめよ。

解: 正值性は  $(u, u) = \sum_i |u_i|^2$  ゆえ明らか。定義から線形性および対称性も同様に明らか。

---

さて、 $\phi_1, \phi_2$  は、次の重要な性質を持つ。

規格直交性:

$$\begin{aligned}(\phi_1, \phi_2) &= \phi_1^\dagger \phi_2 = 0 \\(\phi_1, \phi_1) &= \phi_1^\dagger \phi_1 = (\phi_2, \phi_2) = \phi_2^\dagger \phi_2 = 1\end{aligned}$$

ここで  $\phi_1^\dagger = (\phi_1^*)^t$ 。

完全性:

任意のベクトル  $u$  に対して (順序に注意)

$$(\phi_1 \phi_1^\dagger + \phi_2 \phi_2^\dagger) u = u \quad (5.2)$$

ここで  $pq^\dagger$  はその要素が次のように定義される行列 (ベクトルをベクトルに写像する線形演算子) である:

$$(pq^\dagger)_{ij} \equiv p_i q_j^\dagger \quad (5.3)$$

$$((pq^\dagger)u)_i = \sum_j (pq^\dagger)_{ij} u_j = p_i q_j^\dagger u_j = p_i (q^\dagger u) \quad (5.4)$$

あるいは、

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$
$$q^\dagger = (q_1^*, q_2^*) \implies pq^\dagger = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} (q_1^*, q_2^*) \quad (5.5)$$

のように理解してもよい。すると

$$(pq^\dagger)u \equiv p(q^\dagger u) \quad (5.6)$$

(5.2) の左辺の各項は射影演算子 (projection operator) と呼ばれるものになっている。

$$P_1 \equiv \phi_1 \phi_1^\dagger = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

$$P_2 \equiv \phi_2 \phi_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

すなわち

$$P_1 u = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 u = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

これらは次の性質を満たすことが規格直交性から容易に確かめられる。

$$P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2, \quad P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0.$$

これは、一回射影してしまえば、もう一回射影しても同じであり、また一度第一成分に射影してしまえば、その第二成分はゼロであるということを表しているにすぎない。

完全性のチェック: 上記  $P_1 u, P_2 u$  の式から直ちに

$$(P_1 + P_2)u = P_1 u + P_2 u = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u \quad (5.10)$$

すなわち

$$P_1 + P_2 = 1$$

が成り立ち、完全性が確かめられる。

## 5.2 規格直交性と完全性の使い方

ベクトル  $u$  を次のように展開：

$$u = u_1\phi_1 + u_2\phi_2.$$

### 1. 規格直交性より

$$u_1 = \phi_1^\dagger u = (\phi_1, u)$$

$$u_2 = \phi_2^\dagger u = (\phi_2, u)$$

従って、規格直交性から展開係数がわかる。

### 2. 上で決められた係数をもとの展開式に代入すると、

$$\begin{aligned} u_1\phi_1 + u_2\phi_2 &= \phi_1\phi_1^\dagger u + \phi_2\phi_2^\dagger u \\ &= (\phi_1\phi_1^\dagger + \phi_2\phi_2^\dagger)u \\ &= u \end{aligned}$$

従って、完全性は直交性から決められた係数を用いれば元のベクトルが正しく再現されることを保証している。

□ 完全性の判定:

いま  $n$  次元のベクトル空間  $\mathcal{V}$  に属する  $m$  個の正規直交ベクトルの組  $\{\phi_i\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を持ってきて、任意のベクトル  $u$  を展開しようとしたとする。

$m < n$  の場合は数が足りないので任意のベクトルに対しては上手くいかないはずであるが、とりあえず

$$u \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^m c_i \phi_i$$

と表せる としてみる。すると係数  $c_i$  は直交性から

$$c_i = (\phi_i, u)$$

と求めることができる。こうして決まった係数を用いて  $\sum_i c_i \phi_i$  を作り、実際の  $u$  と比較する。差  $\Delta u = u - \sum_i c_i \phi_i$  の二乗は内積の性質から負になり得ないから

$$\begin{aligned}
 (\Delta u, \Delta u) &= \left( u - \sum_i c_i \phi_i, u - \sum_i c_i \phi_i \right) \\
 &= (u, u) - \sum_i (u, c_i \phi_i) - \sum_i (c_i \phi_i, u) + \sum_{i,j} c_i^* c_j (\phi_i, \phi_j) \\
 &= (u, u) - \sum_{i=1}^m |c_i|^2 \geq 0 \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

ゆえ一般に

$$(u, u) \geq \sum_{i=1}^m |c_i|^2 \quad \text{Bessel の不等式}$$

が成り立つ。 $m = n$  で、組  $\{\phi_i\}$  が完全 (完備とも言う)  $\iff \Delta u = 0$  であるから、上の式で等号が成り立つ。逆に等号が成り立つならば、内積の性質から、 $\Delta u = 0$  でしか有り得ず、以前に定義した意味で完全系であることがわかる。すなわち

$$\begin{aligned}
 \{\phi_i\} \text{ が完全系をなす} &\iff (u, u) = \sum_i |c_i|^2 \\
 \text{ここで} \quad c_i &= (\phi_i, u)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。上記の等式を、Parseval の等式と呼ぶ。要するにピタゴラスの定理が成り立つことである。有限次元のベクトル空間の場合には自明のことだが、これから扱う「関数空間」のような無限次元のベクトル空間の場合には、和が無限和になるので自明ではない。

### 5.3 完全直交基底のエルミート行列の固有ベクトルとしての作り方

- 完全直交基底は、適当なエルミート行列の固有ベクトルとして特徴づけることができる。これは後で関数空間の直交基底を作るときに重

要になる。

エルミート演算子の定義の復習：  $A$  がエルミート演算子であるとは  $(u, Av) = (Au, v)$  が成り立つことを言う。正規直交系で考えると

$$\begin{aligned}(\hat{e}_i, A\hat{e}_j) &= A_{ij} = (A\hat{e}_i, \hat{e}_j) = (\hat{e}_j, A\hat{e}_i)^* = A_{ji}^* \\ \therefore A^\dagger &= A\end{aligned}$$

上の二次元の例の場合には、エルミート行列  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  を考えると、

$$\sigma_3\phi_1 = +\phi_1, \quad \sigma_3\phi_2 = -\phi_2,$$

となり、 $\phi_{1,2}$  は  $\sigma_3$  の異なる固有値に属する固有ベクトルとなっている。

---

演習 5.2  $\sigma_3$  ではなく、 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  の固有ベクトルとして完全直交基底をつくとどうなるか。

解： 固有値方程式は  $\sigma_1 u = \lambda u$ 。特性方程式は

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2 - 1 = 0 \\ \therefore \lambda &= \pm 1\end{aligned}\tag{5.12}$$

固有ベクトルを決める方程式は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

これを解くと、規格化された二つの固有ベクトルは

$$u_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

これらは直交している。

---

次の定理は基本的である。(実直交行列については以前にやった。)

□ 定理:

エルミート行列の固有値は実数であり、その異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

証明: まず、エルミート行列  $A$  の固有値は実数であることを示そう。 $\phi_\lambda$  を規格化された固有ベクトルとする: すなわち  $A\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$ ,  $(\phi_\lambda, \phi_\lambda) = 1$  すると、

$$\begin{aligned}\lambda &= (\phi_\lambda, A\phi_\lambda) \\ &= (A^\dagger\phi_\lambda, \phi_\lambda) \\ &= (A\phi_\lambda, \phi_\lambda) \\ &= (\phi_\lambda, A\phi_\lambda)^* \\ &= \lambda^*\end{aligned}$$

従って  $\lambda$  は実数。すると、 $\lambda, \lambda'$  を二つの異なる固有値とすると、

$$\begin{aligned}(\phi_\lambda, A\phi_{\lambda'}) &= \lambda'(\phi_\lambda, \phi_{\lambda'}) \\ &= (A\phi_\lambda, \phi_{\lambda'}) \\ &= \lambda(\phi_\lambda, \phi_{\lambda'})\end{aligned}$$

$$\text{ゆえ } (\lambda' - \lambda)(\phi_\lambda, \phi_{\lambda'}) = 0$$

仮定により、 $\lambda' \neq \lambda$  だから、 $\phi_\lambda$  と  $\phi_{\lambda'}$  は直交する。

## 5.4 内積の入ったベクトル空間としての関数空間

以上の考察を関数のつくる(無限次元)ベクトル空間に適用する。区間  $[a, b]$  で定義された複素数値関数の全体を考える。(当分、滑らかさは適当に仮定。) これらの関数の全体は次の演算に対して複素ベクトル空間をなす。

$$(af + bg)(x) \equiv af(x) + bg(x) \quad a, b \in \mathbf{C}$$

図のように、区間  $[a, b]$  を  $N$  個の小区間に分ける。





すると関数  $f(x)$  はベクトル

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

で近似される。区間の幅を小さくすることにより近似はいくらでも良くなる。有限次元のベクトルに対して、ナイーブには

$$(f, g) = \sum_{n=0}^N f^*(x_n)g(x_n)$$

として内積を定義するのが自然なように見えるが、連続的な極限をとると、無限和は明らかに発散する。これを回避するには、

$$(f, g) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f^*(x_n)g(x_n) \frac{b-a}{N} = \int_a^b f^*(x)g(x)dx.$$

と定義すればよい。但し無論この積分が収束するようなクラスの関数に制限する。

---

演習 5.3 こうして定義された内積は、エルミート内積の定義を満たすことを示せ。

解: 正值性は  $(f, f) = \int_a^b |f(x)|^2 \geq 0$  ゆえ明らか。線形性と対称性も明らか。

---

## 5.5 関数空間の完全直交関数系の定義

$\{\phi_n(x)\}$  ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ) が完全直交関数系 (基底) であるとは次の二つの性質をもつことを言う。(  $n$  は (負も含めて) 全ての整数を走る

場合もある。)

$$\text{規格直交性: } (\phi_m, \phi_n) = \int_a^b dx \phi_m^*(x) \phi_n(x) = \delta_{mn},$$

$$\text{完全性: } \int_a^b dy \sum_m \phi_m(x) \phi_m^*(y) f(y) = f(x), \quad \forall f(x) \quad (5.13)$$

2次元の場合の完全性の定義  $(\phi_1 \phi_1^\dagger + \phi_2 \phi_2^\dagger)u = u$  と比較しよう。これを詳しく書くと、

$$\sum_j \underbrace{((\phi_1)_i (\phi_1^\dagger)_j + (\phi_2)_i (\phi_2^\dagger)_j)}_{\delta_{ij}} u_j = u_i \quad (5.14)$$

であるから、行、列の添え字が  $x, y$  に、またその和は積分に対応していることがわかる。

このとき任意の関数  $f(x)$  は次のように展開される。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x)$$

$$\text{係数 } f_m = \int_a^b dy \phi_m^*(y) f(y) = (\phi_m, f) \quad (5.15)$$

完全性より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_a^b dy \phi_n^*(y) f(y)}_{(\phi_n, f) = f_n} \phi_n(x) = f(x).$$

## 5.6 Dirac の $\delta$ 関数

上記の完全性関係は次のようにあらわすこともできる：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \phi_n^*(y) \equiv \delta(x, y).$$

ここで  $\delta(x, y)$  はディラックの  $\delta$  関数と呼ばれるものであり、以前の有限ベクトル空間の場合の単位行列 1 の役割を果たしている。 $x$  が行、 $y$  が列

に対応している。  
すると完全性の式は

$$\int_a^b dy \delta(x, y) f(y) = f(x) \quad \forall f(x)$$

と書ける。逆にこれが  $\delta(x, y)$  の定義であると思って良い。

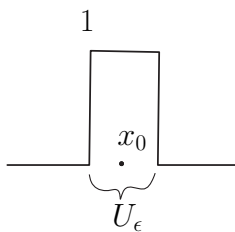
(i) さてここで、 $x \in [a, b]$  で  $f(x) = 1$  なる 定数関数 をとれば、

$$\int_a^b dy \delta(x, y) = 1 \quad \text{for } x \in [a, b].$$

(ii) また、 $f(x)$  としてある点  $x_0$  の幅  $\epsilon$  の小さな近傍  $U_\epsilon$  のみで 1、他の区間では 0 であるようなものをとると、 $y$  積分は  $U_\epsilon$  のみから寄与をえるから、

$$\int_a^b dy \delta(x, y) f(y) = \int_{U_\epsilon} dy \delta(x, y) f(y) = f(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin U_\epsilon \\ 1 & \text{if } x \in U_\epsilon \end{cases}$$

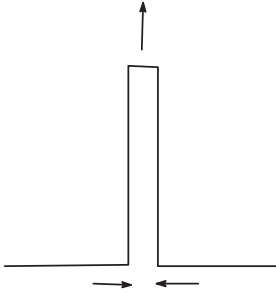
(最初の等号は  $\delta$  関数の定義。二番目の等号は  $f(x)$  の定義。)



これより  $\delta(x, y)$  は  $x$  と  $y$  がともに共通の  $U_\epsilon$  に入る時しか値を持たないことがわかるが、 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限においても  $\delta$  関数の積分値は 1 にとどまらねばならぬから、結局

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ \infty & x = y \end{cases}$$

でなければならないことがわかる。



また、

$$\begin{aligned} \sum \phi_n(x)\phi_n^*(y) &= \delta(x, y) \\ \therefore \delta(y, x) &= \sum \phi_n(y)\phi_n^*(x) = \delta(x, y)^* \end{aligned}$$

しかし、 $y = x$  のときのみ値を持つのであるから、 $\delta(x, x) = \delta(x, x)^*$ 、すなわち、 $\delta(x, y)$  は実である。

しかも、 $\delta(y, x) = \delta(x, y)^* = \delta(x, y)$  であるから、 $x, y$  に関して対称。従って、 $\delta(x, y)$  を  $\delta(x - y)$  と書いて、 $x = y$  のときのみ値をもつ 1 変数の偶関数と見なすことができる。

しかし、上の図からもわかるように、 $\delta$  関数は厳密には「関数」とは言えず、「超関数」(distribution または hyper function) と呼ばれ、以下のように関数列の極限として定義される。

□  $\delta$  関数になる関数列の例:

(1)  $\delta$  関数に導く関数列は色々あるが、次のものは特に重要である。

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon(x) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\epsilon|k|} e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk e^{k(ix-\epsilon)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk e^{-k(ix+\epsilon)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon - ix} + \frac{1}{\epsilon + ix} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} \end{aligned}$$

$\epsilon \rightarrow 0$  の極限でこの関数は  $\delta$  関数の特徴を満たす。実際

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{x}{\epsilon} \right]_{-\infty}^{\infty} = 1$$

従って (しばしば  $e^{-\epsilon|k|}$  は省略して) 次のように表される。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}.$$

(2) もう一つの代表的な表式を上げると

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} \quad (5.16)$$

---

演習 5.4 実際この関数列が  $\delta$  関数になることを確かめよ。

解:  $n \rightarrow \infty$  のとき、0 の周りの微小な区間で積分してみる。  $y = \sqrt{n}x$  とおくと

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a}^a dx \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{na}}^{\sqrt{na}} dy e^{-y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

積分は Gauss 積分であり  $\sqrt{\pi}$  を与えるから全体で 1 となる。

---

## 5.7 完全直交関数系のとり方 (見つけ方)

有限次元のベクトルの場合と同様に、何らかの線形エルミート微分演算子  $D_x$  の固有関数として完全直交系を実現することを考える。区間  $[a, b]$  上の関数空間におけるエルミート演算子は

$$(g, D_x f) = (D_x g, f) \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

を満たすものとして定義される。内積は積分で与えられるのであったから、これは

$$\int_a^b g^*(x) D_x f(x) = \int_a^b (D_x g(x))^* f(x) \quad (5.20)$$

を意味する。

以下このようなエルミート演算子に対して

$$D_x \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x)$$

を満たす  $\{\phi_n(x)\}$  及び  $\lambda_n$  を求める問題を考える。

### 5.7.1 有限区間の Fourier 解析

区間を  $[-L, L]$  ととり、最も簡単な、しかし最も重要な、一階の微分演算子

$$D_x = \hat{k} \equiv \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$$

を考える。

□ エルミート性の条件:

$$\begin{aligned} (f, \hat{k}g) &= \int_{-L}^L dx f^*(x) \frac{1}{i} \frac{d}{dx} g(x) \\ &= \int_{-L}^L dx \frac{1}{i} \frac{d}{dx} (f^*(x)g(x)) + \int_{-L}^L dx \left( \left( \frac{1}{i} \frac{df(x)}{dx} \right)^* g(x) \right) \\ &= \frac{1}{i} [f^*(L)g(L) - f^*(-L)g(-L)] + (\hat{k}f, g) \end{aligned}$$

ゆえ、 $\hat{k}$  がエルミートである条件は、

$$(\star) \quad f^*(L)g(L) = f^*(-L)g(-L).$$

このように、微分演算子のエルミート性は境界条件によるので注意する。  
 $f, g$  は任意であるから、 $(*)$  が常に成り立つためには、関数空間を周期境界条件

$$f(L) = f(-L)$$

をみたすものに限る必要がある。このとき  $\hat{k}$  のエルミート性は満足され、固有値は実数になる。

□ 固有関数 :

固有関数を求めよう。固有値方程式 (微分方程式)

$$\hat{k}\phi = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \phi(x) = k\phi(x)$$

は簡単に解けて

$$\phi(x) = ce^{ikx}.$$

周期境界条件を課すと

$$\phi(L) = ce^{ikL} = \phi(-L) = ce^{-ikL}$$

より、 $\exp(i2kL) = 1$ . よって 固有値は離散的 であり、

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

固有値は全て異なる ので、一般論から固有関数は直交している。規格化の条件は

$$\int_{-L}^L dx |c|^2 e^{in\pi/L} e^{-in\pi/L} = 2L |c|^2 = 1$$

従って  $c = 1/\sqrt{2L}$  となり、規格化された固有関数は

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{ik_n x}$$

となる。従ってこれらが、あるクラスの関数空間で完全系をなすことがわかれば、次の形の展開が成り立つ。

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \phi_n(x)$$

$$c_n = (\phi_n, f) = \int_{-L}^L dx \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{-ik_n x} f(x) \quad (5.21)$$

これを複素型の Fourier 級数展開という。

□ 完全性の証明：

実は以下で明らかになるように、上記の固有関数  $\phi_n$  は、 $|n|$  が大きなところで小さくなるように、「正則化 (regularize)」しておかなければならない：

$$\phi_n(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{ik_n x - (\epsilon/2)|n|} \quad (5.22)$$

ここで  $\epsilon$  は無限小の正の定数で、最後に 0 に持って行く。完全性の定義から、

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \phi_n(x) \phi_n^*(y) \xrightarrow{?} \delta(x - y) \quad (5.23)$$

が成り立つかどうかを調べればよい。左辺 (LHS(Left-Hand-Side)) を計算する。nn を 0, 正、負にわけ、 $n < 0$  に対しては  $-n$  を  $n$  と書き換えて



$n > 0$  とすると、

$$LHS = \frac{1}{2L} \sum_n e^{ik_n(x-y)} e^{-\epsilon|n|} = \frac{1}{2L} \left( \underbrace{-1}_{n=0} + S_+ + S_- \right)$$

$$S_+ = \sum_{n \geq 0} (e^{i(\pi/L)(x-y)} e^{-\epsilon})^n$$

$$S_- = \sum_{n \geq 0} (e^{-i(\pi/L)(x-y)} e^{-\epsilon})^n$$

正則化の因子をつけておかないと、この和は収束しないことに注意。ここで、

$$z = (\pi/L)(x-y), \quad q \equiv e^{iz}, \quad |q| = 1 \quad (5.24)$$

と定義すると、

$$S_+ = \sum_{n \geq 0} (qe^{-\epsilon})^n = \frac{1}{1 - qe^{-\epsilon}}$$

$$S_- = \sum_{n \geq 0} ((1/q)e^{-\epsilon})^n = \frac{1}{1 - (1/q)e^{-\epsilon}} = -\frac{qe^\epsilon}{1 - qe^\epsilon}$$

従って

$$S_+ - 1 + S_- = \frac{1}{1 - qe^{-\epsilon}} - \left( 1 + \frac{qe^\epsilon}{1 - qe^\epsilon} \right)$$

$$= \frac{1}{1 - qe^{-\epsilon}} - \frac{1}{1 - qe^\epsilon}$$

- $q \neq 1$ 、すなわち  $x \neq y$  の場合には、 $\epsilon \rightarrow 0$  とすると、この表式はゼロになる。
- しかし、 $q = 1$  では  $1/0$  が現れるので、この極限は注意してとらないといけない。 $q = 1$  の近傍では  $z$  は非常に小さく、 $q = 1 + iz + \dots$  と展開できる：

$$qe^{-\epsilon} = (1 + iz + \dots)(1 - \epsilon + \dots) = 1 - \epsilon + iz + \dots$$

$$qe^\epsilon = 1 + \epsilon + iz + \dots$$

従って、

$$\frac{1}{1 - qe^{-\epsilon}} - \frac{1}{1 - qe^\epsilon} \simeq \frac{1}{\epsilon - iz} + \frac{1}{\epsilon + iz} = \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + z^2}$$

ここで、 $\epsilon$  は小さな正数であれば良いので、 $\epsilon \rightarrow (\pi/L)\epsilon$  と置き換えて形を整えると

$$\frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + z^2} \rightarrow \frac{2L}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-y)^2}$$

結局

$$LHS = \frac{1}{2L} \frac{2L}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-y)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-y)^2} \quad (5.25)$$

これは以前定義した  $\delta_\epsilon(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\epsilon|k|} e^{ikx}$  に他ならず、 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限で確かに  $\delta(x-y)$  になる。従って完全性が言えた。 //

### 5.7.2 実数型の Fourier 級数展開

上で得た複素型の展開は非常に見通しの良いものであるが、 $f(x)$  が実数関数の場合には、より見慣れた sine, cosine 関数を用いた展開の形に書くこともできる。

$c_n$  を決める式を次のように実部と虚部に分解する：

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-L}^L \frac{dx}{\sqrt{2L}} e^{-ik_n x} f(x) = \int_{-L}^L \frac{dx}{\sqrt{2L}} (f(x) \cos k_n x - i f(x) \sin k_n x) \\ &\equiv \sqrt{\frac{L}{2}} (a_n - i b_n) \end{aligned} \quad (5.26)$$

すると  $a_n, b_n$  は次のように与えられる：

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \cos k_n x, \quad (5.27)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \sin k_n x \quad (5.28)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (5.29)$$

cos は偶関数、sin は奇関数であるから、 $a_{-n} = a_n, b_{-n} = -b_n$  であり、特

に  $b_0 = 0$  である。従って  $f(x)$  の展開式は

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \phi_n(x) \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \sqrt{\frac{L}{2}} (a_n - ib_n) \frac{1}{\sqrt{2L}} (\cos k_n x + i \sin k_n x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x + i (a_n \sin k_n x - b_n \cos k_n x)] \end{aligned}$$

虚部は  $n$  について奇関数であるから和はゼロになる。従って、最終的に次の展開式を得る：

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \underbrace{a_n \cos k_n x}_{\text{even}} + \underbrace{b_n \sin k_n x}_{\text{odd}} \right) \quad (5.30)$$

$n = 0$  以外のモードは  $n$  が正負のところで同じ寄与を得るので二倍の因子がかかることに注意。

### 5.7.3 偶関数と奇関数の Fourier 展開

Fourier 展開したい関数  $f(x)$  が偶関数  $f_e(x)$  または奇関数  $f_o(x)$  の場合、明らかに  $f_e(x)$  は cosine のみで、また  $f_o(x)$  は sine のみで展開される。その時の係数  $a_n$  および  $b_n$  の計算に現れる積  $f_e(x) \cos k_n x$  および  $f_o(x) \sin k_n x$  はいずれも偶関数であるから、

$$\int_{-L}^L f_e(x) \cos k_n x dx = 2 \int_0^L f_e(x) \cos k_n x dx \quad (5.31)$$

$$\int_{-L}^L f_o(x) \sin k_n x dx = 2 \int_0^L f_o(x) \sin k_n x dx \quad (5.32)$$

のように半分の区間の積分で書ける。従って次の公式を得る：

- $f(x)$  偶関数 :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

- $f(x)$  奇関数 :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

## 5.8 Fourier 級数展開ができる条件

いままではどのような関数が Fourier 展開可能かの議論をせずに形式的に取り扱ってきたが、ここでこの重要な問題について考えてみよう。問題の核心は、

- 収束性：  $c_i = (\phi_i, f)$  で求められた係数を用いて無限級数  $\sum_i c_i \phi_i$  をつくったとき、これが収束するか。
- 完全性： 収束するとしても、もとの関数  $f(x)$  に正確に一致するか。

これらは、関数の空間が無限次元ベクトル空間をなしているため、自明ではない重要な問題である。一つの結果は次のように述べられる。

□ 区間  $[-L, L]$  で連続な周期関数についての結果:

- 微分  $f'(x)$  が区分的に (すなわち有限個の点を除いて) 連続<sup>2</sup>ならば、 $f(x) = \sum_i (\phi_i, f) \phi_i$  が成り立つ。(次節でもう少しゆるい条件で十分なことを示す。)

詳しい証明は、例えば「解析概論」にある。

証明の要点：

もし  $\sum_i c_i \phi_i$  が 項別積分 できれば  $(\sum_i c_i \phi_i, \phi_n) = c_n$ 。

このときには、すでに  $\{\phi_n\}$  に対して完全性が言えているので、以前有限次元ベクトル空間の場合にやったように  $\Delta f \equiv f - \sum_i c_i \phi_i$  とおくと、 $(\Delta f, \phi_n) = c_n - c_n = 0$  ゆえ  $(\Delta f, \Delta f) = 0$ 。従って内積の性質により  $\Delta f = 0$  となり、Fourier 展開が成立する。

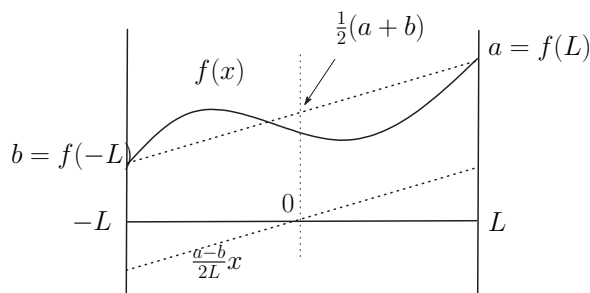
従って 問題はいつ項別積分できるかということになるが、これは  $\sum_i c_i \phi_i$  が 一様に収束 すれば許される (つまり収束の速さが  $x$  の位置によらないこと)。そしてこれを保証するのが  $f'(x)$  の区分的連続性なのである。

<sup>2</sup>区分的に連続 = piecewise continuous.

## 5.9 周期的でない関数の取り扱いと区分的に連続な関数の Fourier 展開

□ 周期的な部分の分離 :

区間  $[-L, L]$  で定義された関数  $f(x)$  は一般に周期性を満たさない。



しかし、区間の両端  $f(L) = a, f(-L) = b$  を結ぶ直線の部分を 引いた関数

$$g(x) \equiv f(x) - \left( \frac{a-b}{2L}x + \frac{1}{2}(a+b) \right)$$

は明らかに周期性を持つ。チェックすると

$$g(-L) = b - \frac{a-b}{2L}(-L) - \frac{1}{2}(a+b) = 0$$

$$g(L) = a - \frac{a-b}{2L}L - \frac{1}{2}(a+b) = 0$$

従って、 $g(x)$  は Fourier 級数に展開できる。これを用いれば、

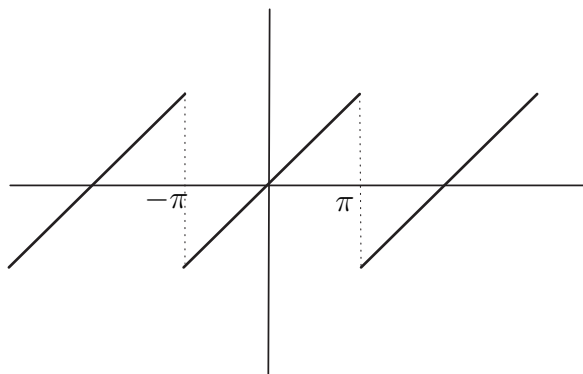
$$f(x) = \frac{a-b}{2L}x + \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{c_n}{\sqrt{2L}} e^{ik_n x}$$

(定数部分  $(a+b)/2$  は  $n=0$  の項に吸収してある。) 応用に際してはこれで十分な場合も多々ある。(後に、弦の波動の解析に用いる。)

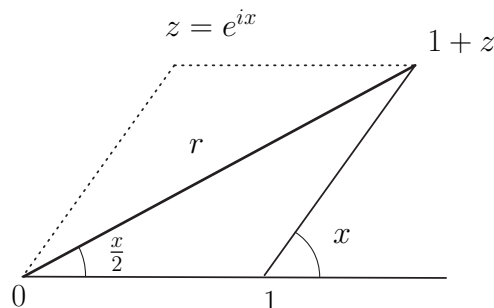
しかし、 $x$  に比例する部分が Fourier 級数に展開できないのかどうかを吟味することも重要になることがある。(例えば、電氣的なパルスを扱うときに必要になる。)

□  $f(x) = x$  の Fourier 級数展開 :

簡単のため、区間を  $[-\pi, \pi]$  とする。このとき、図のように  $f(x) = x$  を周期的に拡張したものを考える。 $x = (2n + 1)\pi$  での値は不連続であるので、後で注意深く考える。



実は、この場合には  $z = e^{ix}$  とおいたときの  $\ln(1 + z)$  の  $z$  に関する Taylor 展開から答が求まる。すなわち、Fourier 展開は  $e^{ix}$  の巾展開と見なすことができるのである。この見方はしばしば非常に便利である。



$\ln(1 + z)$  の  $z$  に関する Taylor 展開は、 $z \neq -1$  のとき (すなわち、 $x \neq \pm\pi$  のとき)

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

ここで  $z = e^{ix}$  を代入し、虚部をとると

$$\text{Im} \ln(1 + e^{ix}) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \quad (5.33)$$

しかるに上の図 (二等辺三角形) より、 $1 + e^{ix} = r e^{ix/2}$  と書けることがわかるから、上式 (5.33) の左辺は  $\text{Im} \ln(r e^{ix/2}) = x/2$  に等しい。従って  $-\pi < x < \pi$  (端は含まない) において

$$x = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

この展開は Fourier 係数 を計算することによっても得られる。 $f(x) = x$  は奇関数であるから、 $\sin$  関数の係数のみゼロでなく

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx x \sin nx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi dx \cos nx \right) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \quad (\text{積分はゼロ}) \end{aligned}$$

これからやはり 上と同様の展開式 が得られる。

注目すべきは端の点での値である。級数の各項は  $x = \pm\pi$  でゼロであるが、周期的に拡張された関数  $f(x) = x$  の値はここで不連続で不確定である。そこでここでの関数の値を

$$f(\pi) \equiv \frac{1}{2} (f(\pi - 0) + f(\pi + 0)) \quad -\pi \text{ についても同様}$$

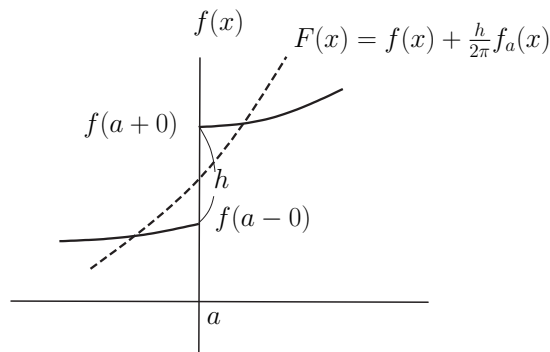
と 定義すれば、うまく Fourier 展開が成り立つことになる。

□ 区間中に飛びがある場合:

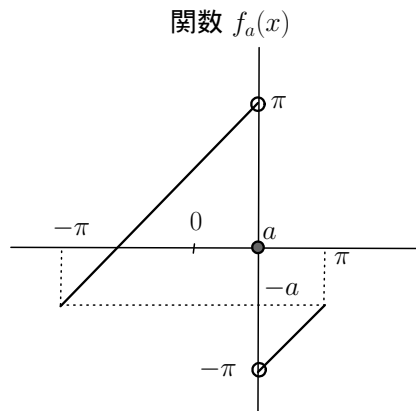
上記の考え方を応用すれば、区間中に飛びがある関数の Fourier 展開 が可能になる。

$f(x)$  は区間  $[-\pi, \pi]$  で周期境界条件を満たすが、区間の中の一点  $x = a$  で不連続であり、 $x = a$  で飛び  $h = f(a+0) - f(a-0)$  を持つとする(下図)。





この飛びを消すために、ちょうどそこで不連続となる下図の直線関数  $f_a(x)$  を考える。



すなわち

$$f_a(x) = \begin{cases} x - a + \pi & \text{for } x < a \\ x - a - \pi & \text{for } x > a \end{cases} \quad (5.34)$$

$$f_a(a) \equiv 0 \quad (5.35)$$

これを  $h/2\pi$  倍して飛びがちょうど  $h$  になるようにしたもの、すなわち  $(h/2\pi)f_a(x)$  をもとの関数  $f(x)$  に加えて

$$F(x) \equiv f(x) + \frac{h}{2\pi} f_a(x)$$

を作ると、図から明らかなように飛びは消える。実際

$$\begin{aligned} F(a-0) &= f(a-0) + \frac{h}{2} = \frac{1}{2}(f(a-0) + f(a+0)) \\ F(a+0) &= f(a+0) - \frac{h}{2} = \frac{1}{2}(f(a-0) + f(a+0)) \end{aligned}$$

であるから、 $F(x)$  は  $x = a$  で連続である。

しかも、 $f_a(-\pi) = -a = f_a(\pi)$  ゆえ、 $F(x)$  の周期性は保たれている。

従って  $F(x)$  は Fourier 展開可能であるが、前に見たように  $f_a(x)$  も  $f_a(a) = 0$  と定義すれば Fourier 級数に展開される。従って  $f(x) = F(x) - \frac{h}{2\pi} f_a(x)$  もまた Fourier 展開可能ということになる。但し、 $f_a(a) = 0$  であるから、

$$f(a) = F(a) - \frac{h}{2\pi} f_a(a) = \frac{1}{2} (f(a-0) + f(a+0))$$

と定義しなければならない。

□ Fourier 展開可能条件:

以上より、Fourier 展開可能条件は次のようにゆるめられる。

- 区間  $[a, b]$  において定義された区分的に連続な関数  $f(x)$  を周期的に拡張した関数は、 $f'(x)$  が区分的に連続であれば Fourier 級数に展開できる。但し不連続点においてはその前後の値の平均値をもって  $f(x)$  の値とする。

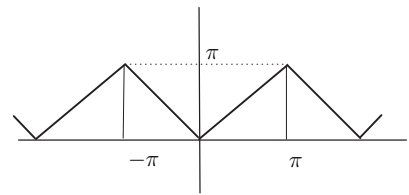
## 5.10 Fourier 級数の様々な例

### 5.10.1 Fourier 級数の例

いくつか典型的な例をあげる。区間はすべて  $[-\pi, \pi]$  とする。

1.  $f(x) = |x|$   $x \in [-\pi, \pi]$ . (偶関数)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx x = \pi \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx x \cos nx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & n = \text{even} \\ \frac{-4}{n^2\pi} & n = \text{odd} \end{cases} \end{aligned}$$

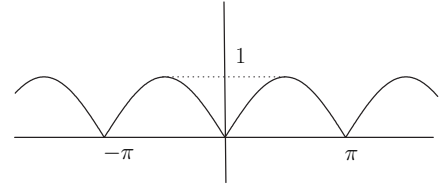


ゆえに

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} \cos nx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

2.  $f(x) = |\sin x| \quad x \in [-\pi, \pi]$ . (偶関数)

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1} \cos nx.$$



3.  $f(x) = x^2$  (偶関数)

$a_0$  の計算は易しい :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx x^2 = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3} \pi^2 \quad (5.36)$$

$a_n$  は

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx x^2 \cos nx \quad (5.37)$$

この種の積分を計算するには次のトリックが有効である。

$$\int_0^{\pi} dx x^2 e^{ax} = \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_0^{\pi} dx e^{ax} = \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left( \frac{1}{a} (e^{\pi a} - 1) \right) \quad (5.38)$$

微分を実行すると

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left( \frac{1}{a} (e^{\pi a} - 1) \right) = e^{a\pi} \left( \frac{2}{a^3} - \frac{2\pi}{a^2} + \frac{\pi^2}{a} \right) - \frac{2}{a^3}$$

従って

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^{\pi} dx x^2 e^{inx} &= e^{in\pi} \frac{2\pi}{n^2} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} \\ \therefore a_n &= \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned} \quad (5.39)$$

これより

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (5.40)$$

4.

$$f(x) = \frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad |a| < 1$$

まともにやろうとするとかなりやっかい。ここで、Fourier 展開は  $z = e^{ix}$  の巾展開である視点を活用。

$$\sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{2i} \frac{z - z^{-1}}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2} \\ &= \frac{a}{2i} \frac{z - z^{-1}}{(1 - az)(1 - az^{-1})} \end{aligned} \quad (5.41)$$

ここで次の関係式に着目する：

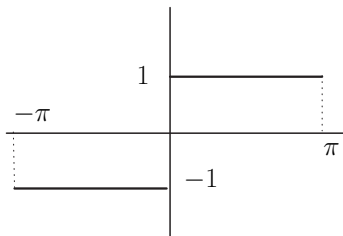
$$\frac{1}{1 - az} - \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{a(z - z^{-1})}{(1 - az)(1 - az^{-1})} \quad (5.42)$$

従って

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{1 - az} - \frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{1}{2i} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (az)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} a^n \frac{z^n - z^{-n}}{2i} = \sum_{n \geq 1} a^n \sin nx \end{aligned} \quad (5.43)$$

これが求める Fourier 級数展開である。

演習 5.5 下図のような矩形パルス形関数の Fourier 展開を求めよ



解:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin nx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 dx (-1) \sin nx + \int_0^{\pi} dx 1 \cdot \sin nx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

従って Fourier 展開は

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

---

演習 5.6  $f(x) = \sin cx$ 、但し  $c \neq \text{integer}$ 、を Fourier 展開せよ。(たとえば  $c = 1/2$  の場合は倍角公式の逆と解釈される。)

解:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin cx \sin nx \quad (5.44)$$

公式

$$\sin \alpha x \sin \beta x = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta)x - \cos(\alpha - \beta)x) \quad (5.45)$$

を用いると

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx (\cos(n+c)x - \cos(n-c)x) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{n+c} \sin(n+c)\pi - \frac{1}{n-c} \sin(n-c)\pi \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{n+c} (\sin c\pi \cos n\pi + \cos c\pi \sin n\pi) - \frac{1}{n-c} (-\sin c\pi \cos n\pi) \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} (-1)^n \left( \frac{1}{n+c} + \frac{1}{n-c} \right) \sin c\pi \\ &= \frac{1}{\pi} (-1)^{n-1} \frac{2n}{n^2 - c^2} \sin c\pi \quad (5.46) \end{aligned}$$

従って

$$\sin cx = -\frac{2}{\pi} \sin c\pi \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{n^2 - c^2} \sin nx \quad (5.47)$$

## 5.11 無限区間の Fourier 解析： Fourier 積分と Fourier 変換

無限区間の周期的でない関数は、有限区間のときと違って周期関数に拡張することができない。しかしこの場合も周期が無限大になった極限と考えることができる。

□ Fourier 級数の  $L \rightarrow \infty$  リミット:

有限区間  $[-L, L]$  での Fourier 展開から始める:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n \frac{c_n}{\sqrt{2L}} e^{ik_n x} \\ c_n &= \int_{-L}^L dy \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{-ik_n y} f(y) \\ k_n &= \frac{\pi}{L} n \end{aligned}$$

ここで  $L \rightarrow \infty$  の極限をとるのだが、まず係数  $c_n$  について考える。規格化の因子のため、そのままでは  $c_n$  はゼロになってしまうので、 $\sqrt{L}$  に比例する量を掛けてからリミットをとる:

$$\tilde{f}(k_n) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{L}{\pi}} c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik_n y} f(y)$$

すなわちもとの展開を

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n \left( \sqrt{\frac{L}{\pi}} c_n \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\pi}{L} \right) e^{ik_n x} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_n \tilde{f}(k_n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_n x} \Delta k_n \\ \Delta k_n &= \frac{\pi}{L} \end{aligned}$$

と書く。ここで  $\Delta k_n$  は  $n$  が 1 増えるときの  $k_n$  の増分である。 $\Delta k_n$  をゼロに持っていくと、 $k_n$  は連続変数  $k$  になるとともに、級数は明らかに次の積分に移行する。 $\tilde{f}(k)$  の式と併せて書くと

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \tilde{f}(k) \quad (5.48)$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} f(y) \quad (5.49)$$

第二式で求まる係数を用いて  $f(x)$  を第一式の様に表すことを Fourier 積分表示という。また、 $f(x)$  と  $\tilde{f}(k)$  は互いに同じ形の積分式で移り合うから、この側面を強調するときには、第二式を  $f(x)$  の Fourier 変換、第一式をその Fourier 逆変換と呼ぶ。

これらの関係式は無限区間の規格化された完全直交基底として

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad (5.50)$$

がとれることを意味する。但し、直交性、完全性は  $\delta$ -関数の意味で成り立つ。すなわち

$$(\phi_k, \phi_{k'}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\pi} e^{i(k'-k)x} = \delta(k' - k) \quad (5.51)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \phi_k^*(x) \phi_k(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(y-x)} = \delta(x - y) \quad (5.52)$$

むしろ正確には、収束因子を加えて

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\epsilon|k|} e^{ikx} \quad (5.53)$$

と定義しなければならない。

□ Fourier 積分表示の成立条件 :

Fourier 積分表示については、次の条件が十分であることが知られている :

1.  $f(x), f'(x)$  はあらゆる有限区間で区分的に連続。
2.  $f(x)$  は  $[-\infty, \infty]$  で絶対積分可能。すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty$$

注 : これはかなりきつい条件であり、超関数まで許せばはずせる場合が多い。例えば  $f(x) = 1$  はこの条件を満たさないが、この Fourier 積分が  $\delta$  関数として表されるのを我々は知っている。

つまり、 $e^{-\epsilon|x|}$  をつけて絶対積分可能にして扱えばよい。

□ Fourier 変換の例 1:

残念ながら、初等関数のみで表せる Fourier 変換公式はあまりないが、次の例は基本的である。

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0$$

Fourier 変換すると

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-a|x|} e^{ikx} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} (e^{-x(a-ik)} + e^{-x(a+ik)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2+k^2} \end{aligned} \quad (5.54)$$

(これは  $a = \epsilon$  とすれば以前  $\delta$  関数の表式として現れたものである。) この逆を考えると、

$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} \quad (5.55)$$

の Fourier 変換が

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|k|} \quad (5.56)$$

で与えられることも直ちにわかる。

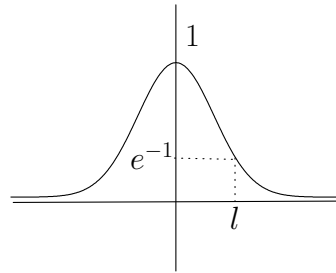


□ Fourier 変換の例 2 : Gauss 型関数の Fourier 変換:

以下で詳しく述べる Gauss 型関数の Fourier 変換は非常に重要である。  
Gauss 型関数とは

$$f(x) = e^{-x^2/l^2}$$

の形のもを指す。



これは、 $x = 0$  のまわりに幅  $l$  を持つ釣り鐘型を表す。これは偶関数であるからその Fourier 変換は

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/l^2} e^{-ikx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/l^2} (\cos kx - i \sin kx) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/l^2} \cos kx \end{aligned}$$

で与えられる。

積分の初等的な計算法: 上記の積分は次のタイプ:

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} e^{ibx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \cos bx$$

$b$  で微分して部分積分を用いると  $I$  に対する次のような微分方程式を得る:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial b} &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} x \sin bx \quad \leftarrow (dx x = \frac{1}{2} dx^2) \\ &= \frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin bx \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{b}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \cos bx = -\frac{b}{2a} I \end{aligned}$$

ここで次の初等的な積分公式を用いた

$$\int dx x e^{-ax^2} = \int \frac{du}{2} e^{-au} = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2}$$

より簡単な導き方：

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} e^{-ax^2+ibx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (-2ax + ib) e^{-ax^2+ibx} \\ &= \left( -2a \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial b} + ib \right) I \end{aligned} \quad (5.57)$$

$b$  で積分し直すと  $b$ -依存性が完全に決まる：

$$\begin{aligned} \frac{dI}{I} &= -\frac{b}{2a} db \\ \therefore \ln I &= -\frac{b^2}{4a} + c \\ \therefore I(a, b) &= c(a) e^{-b^2/4a} \end{aligned}$$

ここで  $b = 0$  と置くと係数  $c(a)$  を抜き出せる：

$$I(a, 0) = c(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \equiv J$$

この積分は極座標を用いた次のトリックで計算できる：

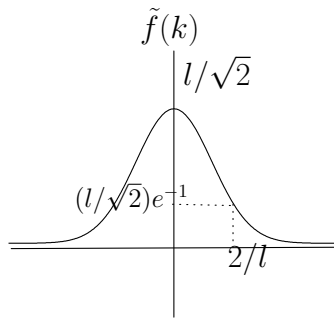
$$\begin{aligned} J^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-a(x^2+y^2)} \\ &= \int 2\pi r dr e^{-ar^2} = \pi \int_0^{\infty} d\rho e^{-a\rho} = -\frac{\pi}{a} e^{-a\rho} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a} \\ \therefore J &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

従って次の重要な公式を得る：

$$I(a, b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/4a}$$

$a = 1/l^2, b = k$  と置くと、

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi l^2}{2\pi}} e^{-(kl/2)^2} = \frac{l}{\sqrt{2}} e^{-(kl/2)^2}$$



すなわち、Gauss 型関数の Fourier 変換はやはり Gauss 型であり、 $k$  空間での広がりとは  $\sim 2/l$  程度となり、 $x$  空間での広がりとの逆数となる。従ってこの広がりを  $\Delta x, \Delta k$  と書くと

$$\Delta x \Delta k \sim 2 \quad (5.58)$$

であり、 $x$  および  $k$  に関する広がりを同時に任意に小さくすることはできない。これは量子力学における「不確定性原理」と対応する。

## 5.12 Fourier 解析の波動への応用

前章で 1 次元の波動方程式の一般解が

$$(*) \quad \zeta(x, t) = \zeta_R(x - vt) + \zeta_L(x + vt) \quad \zeta_r \text{ 及び } \zeta_L \text{ は任意関数}$$

で与えられることを見たが、多次元では 一般にこのように簡単には解けない。

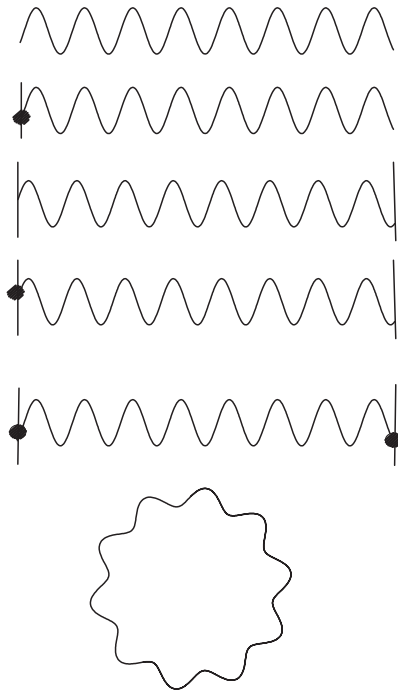
また、実際の問題では、様々な境界条件及び初期条件のもとでの解を求めなければならない。

多次元でも使える強力な方法： Fourier 解析 ( Fourier 変換、 Fourier 級数)

簡単のためまず 1 次元でその方法を解説する。 ((\* ) の方法との比較も有用。 )

□ 問題の種類：

区間及び境界条件により、幾つかの種類に分類される：



A (半)無限区間：→ Fourier 変換

- 無限区間  $[-\infty, \infty]$  での自由な波動。
- 半無限区間  $[0, \infty]$  で片端 ( $x = 0$ ) を固定。

B 有限区間：→ Fourier 級数展開

- 有限区間  $[0, L]$  で両端とも自由端。
- 有限区間  $[0, L]$  で片端を固定。(もう一端は自由運動。)
- 有限区間  $[0, L]$  で両端を固定。
- 有限な長さの閉じた弦を伝わる波動。

### 5.12.1 無限区間 $[-\infty, \infty]$ における自由な波動

無限区間においては  $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikx)$  が完全直交系をなすのであったから、任意の波動は

$$\zeta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk c_k(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

と書ける。波動方程式

$$\left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \zeta = 0$$

に代入してみると、係数  $c_k(t)$  は次の調和振動の方程式を満たすことがわかる。

$$\ddot{c}_k(t) + (kv)^2 c_k(t) = 0.$$

複素関数としての一般解は

$$c_k(t) = c_k^+ e^{ikvt} + c_k^- e^{-ikvt} \quad (5.59)$$

$c_k^+, c_k^-$  は時刻  $t = 0$  での値  $c_k(0)$  及び  $\dot{c}_k(0)$  がわかれば決まる。すなわち

$$c_k(0) = c_k^+ + c_k^-, \quad \dot{c}_k(0) = ikv (c_k^+ - c_k^-)$$

を解けばよい。これらは 初期条件 から Fourier 逆変換で次のように求まる。

$$c_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \zeta(x, 0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$$
$$\dot{c}_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \dot{\zeta}(x, 0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$$

実数の波動の場合 上記の解の実部 (または虚部) をとれば求まるが、直接 Fourier 逆変換の式

$$c_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \zeta(x, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$$

で実数条件  $\zeta(x, t)^* = \zeta(x, t)$  を用いると、係数  $c_k(t)$  は、関係

$$c_k(t)^* = c_{-k}(t)$$

を満たすことがわかる。

演習 5.7 時刻  $t = 0$  で Gauss 型をした波動  $\zeta(x, 0) = e^{-\alpha x^2}$  があり、 $\dot{\zeta}(0, x) = 0$  であったとする。この波動のその後の発展を Fourier 解析を用いて調べよ。

解: まず時刻  $t = 0$  での Fourier 係数を求める。

$$\begin{aligned} c_k(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha x^2} \cos kx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} \end{aligned}$$

また、 $\dot{c}_k(0) = 0$  であるから  $c_k^+ = c_k^-$ . 従って

$$c_k^+ = c_k^- = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} \quad (5.60)$$

これより

$$c_k(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} (e^{ikvt} + e^{-ikvt}) \quad (5.61)$$

であるから

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} (e^{ikvt} + e^{-ikvt}) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( e^{-\frac{1}{4\alpha}k^2 + ik(x+vt)} + e^{-\frac{1}{4\alpha}k^2 + ik(x-vt)} \right) \end{aligned}$$

虚部は奇関数であり積分に効かないから、実部をとり Gauss 積分の公式を用いると、

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{2} \left( e^{-\alpha(x+vt)^2} + e^{-\alpha(x-vt)^2} \right) \quad (5.62)$$

演習 5.8 上記の問題を、波動方程式の一般解の形  $\zeta(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt)$  を利用して解け。

解: 初期条件を入れると

$$\begin{aligned} \zeta(x, 0) &= f(x) + g(x) \\ \dot{\zeta}(x, 0) &= vf'(x) - vg'(x) = 0 \\ &\rightarrow f'(x) = g'(x) \rightarrow f(x) = g(x) + c \end{aligned}$$

組み合わせると  $\zeta(x, 0) = 2g(x) + c$  であるから

$$g(x) = \frac{1}{2}(\zeta(x, 0) - c), \quad f(x) = \frac{1}{2}(\zeta(x, 0) + c)$$

従って

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \frac{1}{2}(\zeta(x + vt, 0) + c) + \frac{1}{2}(\zeta(x - vt, 0) - c) \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{-\alpha(x+vt)^2} + e^{-\alpha(x-vt)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.63)$$

となり、前問の答えと一致する。

---

### 5.12.2 半無限区間 $[0, \infty]$ で片端を固定した場合

無限区間  $[-\infty, \infty]$  に拡張して考えれば Fourier 解析の考え方がそのまま使える。

以下に見るように拡張の仕方は片端の固定条件で決まってくる。

拡張されたとして Fourier 展開すると

$$\zeta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk c_k(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

$x = 0$  での固定条件は

$$\sqrt{2\pi}\zeta(0, t) = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} dk c_k(t)$$

$c_k(t)$  の一般解 (5.59) を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk (c_k^+ e^{ikvt} + c_k^- e^{-ikvt}) \\ &= \int_0^{\infty} dk (c_k^+ e^{ikvt} + c_k^- e^{-ikvt} + c_{-k}^- e^{ikvt} + c_{-k}^+ e^{-ikvt}) \\ &= \int_0^{\infty} dk ((c_k^+ + c_{-k}^-) e^{ikvt} + (c_k^- + c_{-k}^+) e^{-ikvt}) \end{aligned}$$

これが任意の  $t$  に対して成り立つためには、全ての  $k$  に対して

$$c_k^- = -c_{-k}^+$$

(5.59) より

$$\begin{aligned} c_k(t) &= c_k^+ e^{ikvt} + c_k^- e^{-ikvt} \\ \Rightarrow c_{-k}(t) &= c_{-k}^+ e^{-ikvt} + c_{-k}^- e^{ikvt} = -c_k^- e^{-ikvt} - c_k^+ e^{ikvt} = -c_k(t) \end{aligned}$$

従って

$$c_{-k}(t) = -c_k(t)$$

を得る。これを  $\zeta(x, t)$  の展開式に適用すると

$$\begin{aligned}\zeta(-x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk c_k(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk c_{-k}(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \leftarrow (k \rightarrow -k) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dk c_k(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \\ &= -\zeta(x, t)\end{aligned}$$

すなわち、 $x = 0$  での固定条件は  $\zeta(x, t)$  を  $x$  の奇関数として  $[-\infty, \infty]$  に拡張すべきことを言っていることになる。あとは無限区間の場合と全く同じようにやれば良い。無論得られた結果は、もともとの半無限区間に当たる部分のみで適用することになる。

### 5.12.3 有限区間の場合のエネルギー保存と許される境界条件

有限領域での固定端及び自由端の条件の具体的な形を導くには、波動のエネルギー保存則の理解が必要。

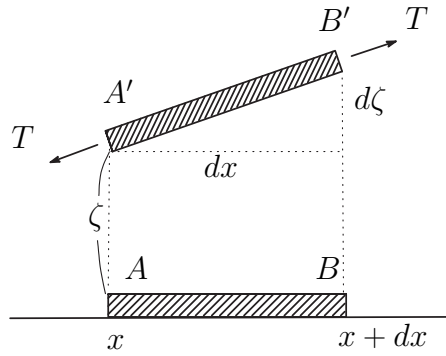
□ 波動のエネルギー:

区間  $[0, L]$  における横波の持つエネルギーを求めよう。エネルギー密度  $\epsilon(x, t)$  は二つの部分よりなる。

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_D + \epsilon_K \\ \epsilon_D &= \text{変形 (deformation) のエネルギー} \\ \epsilon_K &= \text{運動 (kinetic) のエネルギー}\end{aligned}$$

(i) 変形のエネルギー = 伸びのエネルギー





図より明らかに、伸びは ( $|\partial\zeta/\partial x| \ll 1$  を仮定)

$$\begin{aligned}
 A'B' - AB &= \sqrt{(dx)^2 + (d\zeta)^2} - dx \\
 &= dx \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2} - 1 \right) \\
 &\simeq dx \left( 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \cdots - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 dx
 \end{aligned}$$

ゆえ

$$dx \text{ あたりの変形のエネルギー} = \text{張力のした仕事} = \frac{T}{2} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 dx$$

したがって ( $T = \rho v^2$ )

$$\epsilon_D = \frac{T}{2} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2$$

ここで  $\rho$  は質量線密度。

(ii) 運動のエネルギー これは明らかに単位長さあたり

$$\epsilon_K = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2 \leftarrow \frac{1}{2} m v^2$$

したがって全エネルギー密度は

$$\begin{aligned}\epsilon = \epsilon_D + \epsilon_K &= \frac{1}{2}\rho \left[ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= \frac{T}{2} \left[ \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

全エネルギーはこれを積分して

$$E = \int_0^L \epsilon dx$$

で与えられる。

□ エネルギー保存の条件:

外から力を加えない限り、全系のエネルギーはどこへも逃げて行けないので保存しなければならない。この条件から可能な境界条件が定まることを見よう。

時間微分をとってみると

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\rho \int_0^L 2 [\partial_t \zeta \partial_t^2 \zeta + v^2 \partial_x \zeta \partial_x \partial_t \zeta] dx$$

ここで第一項に運動方程式  $\partial_t^2 \zeta = v^2 \partial_x^2 \zeta$  を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \rho v^2 \int_0^L [\partial_t \zeta \partial_x^2 \zeta + \partial_x \zeta \partial_x \partial_t \zeta] dx \\ &= \rho v^2 \int_0^L \partial_x (\partial_x \zeta \partial_t \zeta) dx\end{aligned}\tag{5.64}$$

すなわち、被積分関数は  $x$  に関する微分で書ける。したがって積分が実行できて

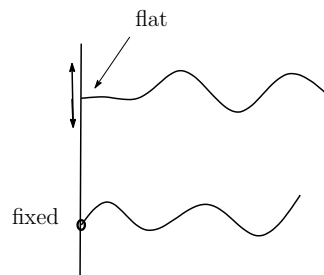
$$\frac{dE}{dt} = \rho v^2 \partial_x \zeta \partial_t \zeta \Big|_0^L$$

従って、エネルギーが保存するためには、弦の端で次のいずれかの局所的な<sup>3</sup>境界条件が満たされている必要がある:

<sup>3</sup>両端の差はコントロールできない。

- Neumann 条件:  $\partial_x \zeta|_{\text{end}} = 0$ : 自由端の条件
- Dirichlet 条件:  $\zeta|_{\text{end}} = \text{const}$ : 固定端の条件

自由端の場合  $\zeta|_{\text{end}}$  自体の値は決まらない。



#### 5.12.4 有限区間での波動

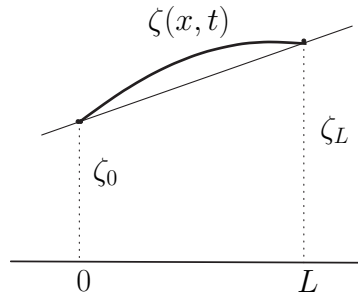
以下では区間を  $[0, L]$  とする。

まず波動を表す関数  $\zeta(x, t)$  を  $x$  の関数として考え、各時刻  $t$  で基本的な波の重ね合わせで表すことを考える。(すなわち Fourier 級数展開したい。) しかし、一般に波動の振幅  $\zeta(x, t)$  はちょうど上記の区間で周期的になっているわけではない。

⇒ Fourier 解析を行うには周期的になるように区間を適当に延長しなければならないが、端での境界条件の指定が微分を含むので、それも考慮して  $\zeta(x, t)$  及びその微分が周期的になるように拡張する必要がある。どのように拡張しなければならないかは、以下に見るように境界条件による。

□ 両端を固定する場合: DD 境界条件:

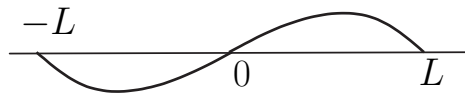
DD 境界条件の場合の一般の波動  $\zeta(x, t)$  を図示すると、



両端での値を  $\zeta(0, t) = \zeta_0$ ,  $\zeta(L, t) = \zeta_L$  とする。これから直線部分を引いて、両端で振幅をゼロにしたものを  $\tilde{\zeta}(x, t)$  とする。すなわち

$$\tilde{\zeta}(x, t) = \zeta(x, t) - \left( \zeta_0 + \frac{\zeta_L - \zeta_0}{L} x \right)$$

しかしまだ両端での微分は等しくない。これを拡張して周期的にするには、区間を  $[-L, L]$  まで延長して、 $\tilde{\zeta}$  を  $x = 0$  の周りで奇関数として拡張すればよい(下図)。(むろんあくまでも真の運動は区間  $[0, L]$  で起きていることに注意。)



従って、DD 条件の場合の波動は次の形に書ける

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 + \frac{\zeta_L - \zeta_0}{L} x + \underbrace{\sum_{n \geq 1} b_n(t) \sin k_n x}_{\tilde{\zeta}(x, t)} \quad (5.65)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

波動方程式に代入する。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \zeta(x, t) &= \sum_{n \geq 1} \ddot{b}_n(t) \sin k_n x \\ \frac{d^2}{dx^2} \zeta(x, t) &= - \sum_{n \geq 1} k_n^2 b_n(t) \sin k_n x \end{aligned}$$

従って、

$$\sum_{n \geq 1} (\ddot{b}_n(t) + (k_n v)^2 b_n(t)) \sin k_n x = 0$$

これより

$$\ddot{b}_n(t) + (k_n v)^2 b_n(t) = 0 \quad (5.66)$$

ゆえ、係数  $b_n(t)$  は調和振動するから

$$\begin{aligned} b_n(t) &= B_n \cos k_n v t + \tilde{B}_n \sin k_n v t \\ \Rightarrow \dot{b}_n(t) &= k_n v (-B_n \sin k_n v t + \tilde{B}_n \cos k_n v t) \end{aligned}$$

係数  $B_n, \tilde{B}_n$  を求めよう。Fourier 級数の公式より

$$b_n(t) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \zeta(x, t) \sin k_n x = \frac{2}{L} \int_0^L dx \zeta(x, t) \sin k_n x$$

したがって初期条件は

$$b_n(0) = B_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \zeta(x, 0) \sin k_n x \longrightarrow B_n \text{ の決定}$$

$$\dot{b}_n(0) = k_n v \tilde{B}_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \dot{\zeta}(x, 0) \sin k_n x \longrightarrow \tilde{B}_n \text{ の決定}$$

$t = 0$  で静かにはなした場合： 簡単のため、両端での値がゼロの場合を考察しよう。このときには  $\dot{\zeta}(x, 0) = 0$  ゆえ、 $\tilde{B}_n = 0$ 。したがって解は次のような 基準振動 の重ね合わせになる。

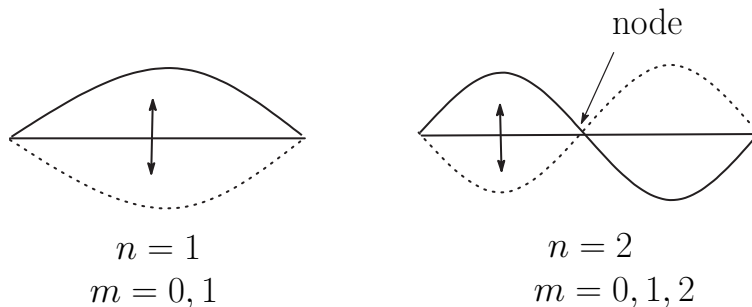
$$\zeta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(x, t)$$

$$\text{ここで } \zeta_n(x, t) \equiv B_n \sin k_n x \cos k_n v t$$

特徴  $\sin k_n x$  の因子があるので、任意の時刻  $t$  で  $k_n x = m\pi$  の位置はゼロ点になる。

$$k_n x = \frac{n\pi}{L} x = m\pi \longrightarrow x = \frac{L}{n} \cdot m \quad (0 \leq x \leq L \text{ ゆえ } 0 \leq m \leq n)$$

最初の二つを図示すると



$$B_1 \sin \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi}{L} vt, \quad B_2 \sin \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi}{L} vt$$

これらは 定常波 (standing wave) とも呼ばれる。ゼロ点に当たるところは 節 (node) と呼ばれる。

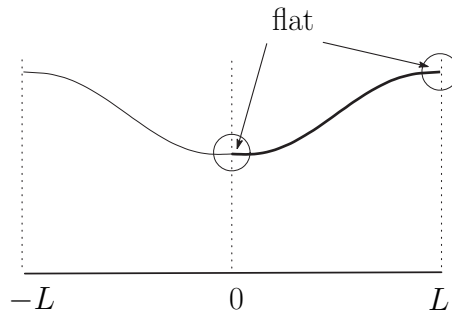
Left-Right 分解  $\zeta_n(x, t)$  を右向きと左向きの波に分解した形で書くと

$$\zeta_n(x, t) = \frac{B_n}{2} [\sin k_n(x - vt) + \sin k_n(x + vt)]$$

これは両端で反射を繰り返す二つの波を表している。Node のところでは常に右向きと左向きの波の振幅が打ち消しあっている。

□ 両端とも自由端の場合: NN 境界条件 :

両端ともに微分がゼロの条件であるから、波動の形と必要な区間の延長は次の図のようになる :



すなわち、区間を  $[-L, L]$  まで延長して、 $\zeta(x, t)$  を  $x = 0$  の周りで今度は偶関数として拡張すればよい。従って

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{2} a_0(t) + \sum_{n \geq 1} a_n(t) \cos k_n x, \quad k_n = \frac{\pi n}{L} \quad (5.67)$$

実際これは  $x = 0, L$  で  $\partial_x \zeta = 0$  を満たしている。

波動方程式に代入すると直ちに次の解を得る :

$$a_0(t) = a + bt \quad (5.68)$$

$$a_n(t) = A_n \cos k_n vt + \tilde{A}_n \sin k_n vt \quad (5.69)$$

時間微分は

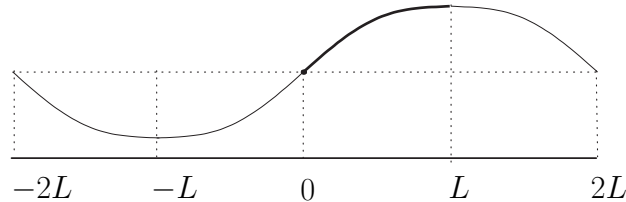
$$\dot{a}_0 = b$$

$$\dot{a}_n = k_n v (-A_n \sin k_n vt + \tilde{A}_n \cos k_n vt)$$

係数  $A_n, \tilde{A}_n$  を求める手続きは NN 条件の場合と同じ。

□ 片端のみ固定する場合: DN 境界条件 (区間  $[0, L]$ ):

この場合の波動の一般的な形、及び拡張の仕方は



まず  $x = L$  では Neumann 条件であるから、これから先を対称に  $2L$  まで拡張する。

左端  $x = 0$  では Dirichlet 条件であるから、こうしてできたものをさらに  $x = 0$  の周りで奇関数として拡張する。

すなわち今度は区間  $[-2L, 2L]$  での Fourier 級数  $\sum_{n \geq 1} b_n(t) \sin p_n x$ ,  $p_n = \pi n / 2L$  を用いる必要がある。但し、 $n$  が偶数の場合は  $x = L$  でゼロに成ってしまうので、 $n$  は奇数でなければならない。従って

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 + \sum_{n \geq 1} b_n(t) \sin p_n x \quad (5.70)$$

$$p_n = \frac{\pi(n + \frac{1}{2})}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.71)$$

実際これは  $x = L$  で  $\partial_x \zeta = 0$  の Neumann 条件を満たしている。

波動方程式より、 $b_n(t)$  は調和振動を行い、

$$b_n(t) = B_n \cos p_n vt + \tilde{B}_n \sin p_n vt \quad (5.72)$$

□ 閉じた弦を伝わる波動:

長さ  $L$  の閉じた弦の境界条件に当たるものは、次の周期条件:

$$\zeta(x + L, t) = \zeta(x, t) \quad (5.73)$$

これはすでに区間  $[0, L]$  で完全に周期的であるから、その区間での Fourier 級数を用いればよい。すなわち

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{2} a_0(t) + \sum_{n \geq 1} (a_n(t) \cos q_n x + b_n(t) \sin q_n x) \quad (5.74)$$

$$q_n = \frac{2\pi n}{L} \quad (5.75)$$

### 5.13 Fourier 解析と波動の分散関係

これまでの考え方を復習する。

- 振幅  $\zeta(x, t)$  の  $x$  依存性にのみ着目して  $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  の固有関数で展開すると、

$$\zeta(x, t) = \sum_k c_k(t) \phi_k(x), \quad \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \phi_k = k \phi_k$$

但し、 $\sum_k$  は積分の場合も含むことにする。 $\phi_k(x)$  は  $\partial^2/\partial x^2$  の固有関数でもあることに注意して波動方程式に代入すると、

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \zeta(x, t) = \sum_k (\ddot{c}_k(t) + k^2 v^2 c_k(t)) \phi_k(x) = 0$$

従って係数  $c_k(t)$  は調和振動の方程式を満たす。この解を代入し、境界条件を考慮して  $\zeta(x, t)$  を求めたのであった。

- しかし、次のような考え方もできる。すなわち、逆に、 $t$  依存性に着目して  $i \frac{\partial}{\partial t}$  の固有関数  $\phi_\omega(t)$  で展開すれば

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \sum_\omega c_\omega(x) \phi_\omega(t), & i \frac{\partial}{\partial t} \phi_\omega(t) &= \omega \phi_\omega(t) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \zeta(x, t) &= \sum_\omega c_\omega(x) (-\omega^2) \phi_\omega(t) \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \zeta(x, t) &= - \sum_\omega (v^2 c_\omega''(x) + \omega^2 c_\omega(x)) \phi_\omega(t) = 0 \end{aligned}$$

となり、係数  $c_\omega(x)$  は今度は  $x$  に関する調和振動子型の方程式を満たす。この方法を用いても同じ答えが得られる。

□ 2重 Fourier 級数展開 :

このことから、いっそのこと  $x$  と  $t$  を同等に扱って、次の 二重 Fourier 級数 に展開するという発想が自然になる。

$$\zeta(x, t) = \sum_{k, \omega} C_{k, \omega} \phi_k(x) \phi_\omega(t)$$

波動方程式に代入すると

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \zeta(x, t) = \sum_{k, \omega} (k^2 v^2 - \omega^2) C_{k, \omega} \phi_k(x) \phi_\omega(t) = 0$$



これより、 $C_{k,\omega} \neq 0$  の場合には、分散関係

$$\omega = \pm kv$$

を得る。分散関係という概念自体が Fourier 展開に基づいていることに注意する。

□ 備考：量子力学の波動方程式（Schrödinger 方程式）：

一次元の自由粒子のエネルギー - 運動量関係式は、古典論において

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

で与えられるが、de Broglie 及び Einstein は次の対応によって、これを波動の分散関係式と読み代えた。

$$\begin{aligned} p &= \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} \\ E &= \hbar\omega \quad \text{ここで } h \text{ はプランク定数} \\ \rightarrow \quad \hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} &= 0 \end{aligned}$$

ここで  $\hbar = h/2\pi$  であり、 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  はプランク定数と呼ばれる。波動の形を

$$\psi = e^{-i\omega t + ikx} = e^{-i(E/\hbar)t + i(p/\hbar)x}$$

とすると、上記の分散式を出す波動方程式は

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right) \psi(x, t) = 0$$

これは Schrödinger 方程式と呼ばれ、波動関数  $\psi(x, t)$  にはたらくものとして、エネルギー及び運動量が微分演算子と同定される。

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

この意味で量子力学はまさしく波動力学であるが、それが古典論と著しく異なる点は、波動関数の確率解釈にある。

$$|\psi(x, t)|^2 = \text{時刻 } t \text{ において粒子を } x \text{ に見いだす確率}$$

ここでは量子力学を本格的に展開することはない。

## 5.14 高次元の波動の例：電磁波

### 5.14.1 Maxwell 方程式

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

特に真空中、すなわち 電荷や電流の分布のない領域 では、この方程式は次のような、電場と磁場についてほぼ対称的で簡単な形をとる：

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \left( \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 \right)\end{aligned}$$

### 5.14.2 真空中の電磁波の方程式

まず、上記の方程式を組み合わせて磁場を消去し、電場  $\vec{E}$  の満たす方程式を導こう。第3の式の rotation をとり、第1、第4式を用いると、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ \text{左辺} &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \\ \text{右辺} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

従って

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \vec{E} = 0$$

を得る。(この意味は、 $\vec{E}$  の各成分が同じ方程式を満たすということ。)

同様に、第4式から出発して  $\vec{B}$  に対する方程式を導くと、 $\vec{E}$  と同じ形の方程式を得る：

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \vec{B} = 0$$

これらを電磁場に対する波動方程式と言う。Maxwell 方程式中の 変位電流の項 が重要な役割を果たしていることに注目せよ。

### 5.14.3 波動方程式の Fourier 解析

$\vec{E}, \vec{B}$  を次の型に Fourier 積分表示する：

$$\vec{E} = \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^2} \vec{\epsilon}_E(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} \quad (5.76)$$

$$\vec{B} = \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^2} \vec{\epsilon}_B(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} \quad (5.77)$$

$\vec{E}$  を波動方程式に代入すると、

$$\int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^2} \vec{\epsilon}_E(\vec{k}, \omega) \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + |\vec{k}|^2\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} = 0 \quad (5.78)$$

角振動数  $\omega$  を正にとれば、解は

$$\omega = c|\vec{k}| \quad (5.79)$$

従って、以前にも述べたように、 $\vec{E}, \vec{B}$  は次の形の平面波解の重ね合わせになる：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{\epsilon}_E(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|\vec{k}|ct} \\ \vec{B} &= \vec{\epsilon}_B(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|\vec{k}|ct}\end{aligned}$$

ここで  $\vec{\epsilon}_E, \vec{\epsilon}_B$  は振幅の変化する方向を表すベクトルで、polarization vector (偏極ベクトル) と呼ばれる。上の複素形では偏極ベクトルも複素数であり、真の電磁場は上の表式の実部をとることにより得られる。この書き方は慣れると  $\sin$  と  $\cos$  の一次結合で書くよりはるかに便利である。

### 平面電磁波の特徴

上記の平面波は Maxwell 方程式を組み合わせて得られた波動方程式の解ではあるが、我々の欲しいのはもともとの個々の Maxwell 方程式の解である。従って上記の形を再度 Maxwell 方程式に代入して、真の解となるために偏極ベクトルや波数が満たすべき条件を導かなければならない。これから、以下に述べるような重要な電磁波の性質が導かれる。

(1) 電磁波は横波： (すなわち偏極の方向は進行方向に垂直)。

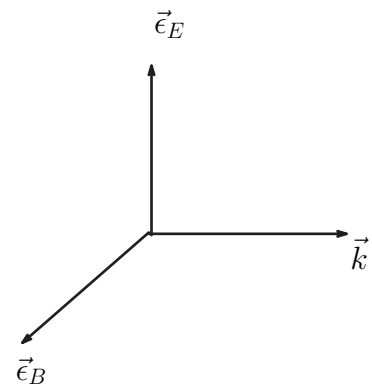
$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \longrightarrow \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_E(\vec{k}) = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \longrightarrow \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_B(\vec{k}) = 0\end{aligned}$$

(2)  $\vec{\epsilon}_E, \vec{\epsilon}_B, \vec{k}$  は右手直交系をなす： まず、平面波解が  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  を満たす条件を考えると

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left( \vec{\epsilon}_E(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|\vec{k}|ct} \right) \\ &= i\vec{k} \times \vec{\epsilon}_E e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|\vec{k}|ct} \\ \text{右辺} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\epsilon}_B(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|\vec{k}|ct} \right) \\ &= i|\vec{k}|c\vec{\epsilon}_B e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|\vec{k}|ct}\end{aligned}$$

これより

$$\vec{k} \times \vec{\epsilon}_E = |\vec{k}|c\vec{\epsilon}_B$$



同様にして、 $\vec{\nabla} \times \vec{B} = -(1/c)(\partial \vec{E} / \partial t)$  より

$$\vec{k} \times \vec{\epsilon}_B = -\frac{1}{c} |\vec{k}| \vec{\epsilon}_E$$

以上見てきたように、Maxwell 方程式は電場や磁場が波動として真空中を速度  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  で伝わっていくことを表す。Maxwell はその速度と当時すでにかかなりの精度で知られていた光速との一致から、光の正体が電磁波であると看破したのである。Maxwell の予言した電磁波は 1888 年 Herz によって検証され、Maxwell 理論の正しさを決定づけることとなった。