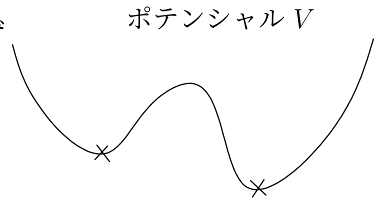
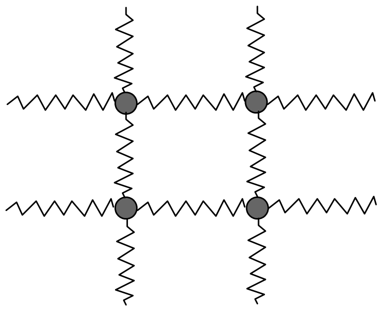
第1章　微小振動

□ **微小振動の重要性**:



- 系が準安定な釣合にある場合、その配置のまわりで必ず微小振動が起こる。非常に普遍的な現象。



- 振動は波動の基本：バネの多体系 → 波動
  古典論 → 電磁波、音波、スピン波 etc.
  一方、波動力学 → 量子力学
  両者の融合 → 場の量子論

物体（媒質）の中の波動の伝播：photon, phonon, plasmon, spin wave, 素粒子の場、graviton, etc.

1.1　一次元調和振動子

周知のように、バネ定数 k のバネはその自然長の周りに、角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ の周期的運動を行うが、こうした運動はより一般に、ポテンシャルエネルギーの極小点の周りで起こる。

ポテンシャルエネルギーの極小点 q_0 のまわりでの展開（一次元の場合）

$$U(q) = U(q_0) + U'(q_0)(q-q_0) + U''(q_0)\frac{1}{2}(q-q_0)^2 + \cdots .$$

極小点の定義より、そこでの力 $F(q_0) = -U'(q_0) = 0$。ゆえエネルギー

の原点を $U(q_0)$ に選び $x = q - q_0$ とおけば

$$U(x) \;=\; \frac{k}{2}x^2 + O(x^3),\,, \qquad k = U''(q_0).$$

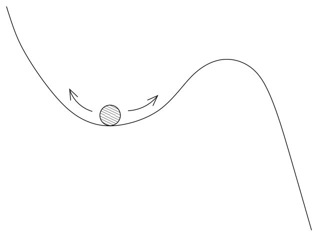


図 wave1-1

すなわち、バネ定数にあたる量は、極小値でのポテンシャルの 2 階微分で与えられる。

近似の成り立つ条件：$|\ \frac{1}{2}U''(q_0)x^2\ | \gg |\ \frac{1}{3}U'''(q_0)x^3\ |$
運動方程式は

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (1.1)\\ &\omega = \sqrt{k/m}. \end{aligned}}$$

独立解は $\cos\omega t$ 及び $\sin\omega t$ ゆえ、一般解は c_1, c_2 を任意の実定数として

$$\boxed{x = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t \qquad (1.2)}$$

で与えられる。

演習 1.1

$$U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

の極小点の周りの微小振動の角振動数を求めよ。

解: $U(x)$ を図示すると

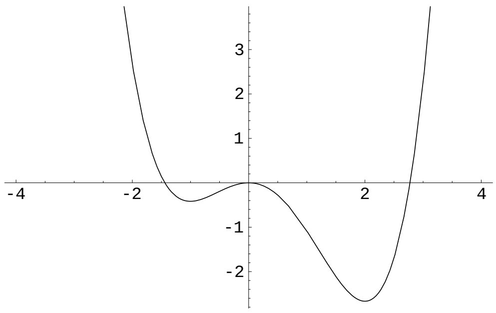


図 wave1-2

極小値は $x=-1,2$。そこでのポテンシャルの 2 階微分およびその周りでの振動の角振動数は

$$
\begin{aligned}
U''(-1) &= 3\,, \qquad \omega_{-1} = \sqrt{3/m} \\
U''(2) &= 6\,, \qquad \omega_2 = \sqrt{6/m}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

□ **線形微分方程式の解の性質**：

ここで一般の線形微分方程式の解の持つ重要な性質をまとめておこう。n 階線形微分方程式とは次のような形を持つものを言う：

$$
\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = 0 \tag{1.4}
$$

一般に $a_i(t)$ は与えられた t の関数であり、無論定数であっても良い。この方程式の解は次の性質を持つ：

- $x_1(t)$ が解であるならば、 c_1 を任意の定数として、$c_1x_1(t)$ も解。
- $x_1(t)$ 及び $x_2(t)$ が解ならば、$x_1(t)+x_2(t)$ も解。

これらの性質は、方程式が x について線形（すなわち x 及びその微分のみを含み、x^2 等の非線形な項を含まない）であることから容易に従う。以上の二つの性質を組み合わせれば、より一般的に次のことが言える：

$\boxed{x_i(t)\ (i=1,2,\ldots,n) \text{ が解ならば、} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) \text{ も解}}$

すなわち、**線型微分方程式の解はベクトル空間をなす**。

□ **初期条件による任意定数の決定**：

微小振動の問題に戻る。一般解 (1.2) に現れた定数 c_i は、ある時刻、例えば $t=0$、での x 及び速度 $v=\dot{x}$ を与えれば決まる。そのような条件を**初期条件**と呼ぶ。今、$t=0$ での初期条件を

$$x(0)=x_0\,, \qquad \dot{x}(0)=v_0 \tag{1.5}$$

$$\tag{1.6}$$

とすると、解及びその微分から次の条件式を得る：

$$\begin{aligned} x_0 &= (c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t)|_{t=0} = c_2 \\ v_0 &= (c_1\omega\cos\omega t - c_2\omega\sin\omega t)|_{t=0} = c_1\omega \end{aligned}$$

これから、c_i を求めて一般解に代入すれば、初期条件を満たす解として

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t \tag{1.7}$$

が得られる。

□ **運動の周期性**：

$\sin\omega t$ 及び $\cos\omega t$ はいずれも周期関数であるから、振動は周期的に起こる。周期的運動に関しては次の概念が基本的である：

周期 $\boldsymbol{T}$:　時間 T 後に運動が元の状態に戻るとすると、$\omega T=2\pi$。従って $T=2\pi/\omega$ となる。

角振動数 $\boldsymbol{\omega}$:　ω 自体は角振動数と呼ばれる。

振動数 $\boldsymbol{\nu}$:　1 周期の間に何回振動するかを表す数で、$\nu=1/T$ で与えられる。角振動数とは $\nu=\omega/2\pi$ の関係で結ばれる。

□ **一般解の別の形**：

上では、一般解を $\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ の線形結合で表したが、もう一つしばしば用いられる便利な表式がある。それは

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t+\theta_0) \qquad (1.8)}$$

なる表式である。 A は**振幅**、θ_0 は**位相のずれ**と呼ばれる。その意味は図より明らかであろう。

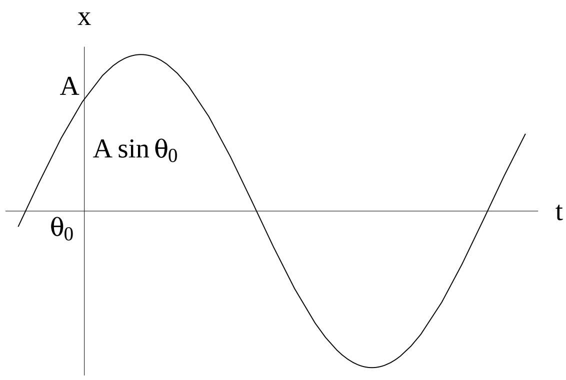


図 wave1-3

以前の表式との関係を見るには、上式を加法定理を用いて展開して見ればよい。

$$\begin{aligned} x(t) &= A(\cos\omega t\cos\theta_0 - \sin\omega t\sin\theta_0) \\ &= (A\cos\theta_0)\cos\omega t + (-A\sin\theta_0)\sin\omega t \end{aligned} \tag{1.9}$$

従って (1.2) との対応は

$$c_1 = -A\sin\theta_0\,, \qquad c_2 = A\cos\theta_0 \tag{1.10}$$

□ **より応用の広い強力な解き方：指数関数による解法**：

以上は三角関数が 2 階微分すると符号を除いて元に戻る性質を用いて解いたのであるが、実は一般の（定数係数）線形微分方程式に適用できるより強力で簡明な解法がある。それは、指数関数が微分しても変わらないことに基づいている。すなわち

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}\,, \qquad \frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t} \qquad etc.$$

であることを思い出して $x = e^{\lambda t}$ と置いてみると、微分方程式 (1.1) は、次のように**代数方程式**に変換され容易に λ が求まる：

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x} + \omega^2 x = (\lambda^2+\omega^2)e^{\lambda t} \\ \therefore \qquad \lambda &= \pm i\omega \end{aligned} \tag{1.11}$$

従って、基本的な解として次の二つが存在することになる：

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \qquad (1.12)\\
x_2(t) &= e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

これらは互いに共役な**複素解**であるが、無論足したり引いたりすれば実数解 $\cos\omega t$ 及び $\sin\omega t$ を作ることができる。実際

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) &= \cos\omega t = \Re x_1(t) = \Re x_2(t) \qquad (1.14)\\
\frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t)) &= \sin\omega t = \Im x_1(t) = -\Im x_2(t) \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

から明らかなように、**複素解の実部や虚部はそれぞれが実数解になっている**。

このことを応用すると、(1.8) の形の解を容易に得ることができる。例えば、$x_1(t)$ に複素定数a を掛けたもの $ae^{i\omega t}$ を考えるとこれもやはり微分方程式の解である。特に a の表式として、複素極座標表示 (ここでもう一度確認すること）

$$
a = Ae^{i\theta_0}\,, \qquad A = \text{正の実数} \qquad (1.16)
$$

を採ると、

$$
ae^{i\omega t} = Ae^{i\theta_0}e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t+\theta_0)} \qquad (1.17)
$$

この実部を取れば、 $A\cos(\omega t + \theta_0)$ を得る。これは二つの任意定数 A, θ_0 を含んでいるので一般解である。

1.2　減衰振動

現実には多くの場合「(動）摩擦」すなわち運動に対する抵抗が存在して運動を減衰させる。摩擦はミクロに考えると難しい現象だが、ここでは媒質（外部系）との相互作用によってエネルギーの移動が起こり熱の形で系からエネルギーが失われることであると考えておいて良い。従って、対象とする振動子のみで系は閉じていない。しかし、簡単な場合には、近似的に系の座標のみを用いて取り扱うことができる（「有効 (effective) 近似」)。特に、流体の粘性（例えば空気抵抗）による抵抗力は、**速度が十分に小さい場合**には良い近似で次のように表される。

$$
F_{\text{まさつ}} = -\alpha\dot{x}\,, \qquad \alpha > 0
$$

（これに対して、物体が面上を滑る場合の動摩擦は速度にほとんど依存しない。）

運動方程式は

$$m\ddot{x} \;=\; -kx - \alpha\dot{x} \tag{1.18}$$

m で割って形を整えると

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1.19)\\ &\qquad \lambda = \frac{\alpha}{2m} = \text{減衰率}\\ &\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{抵抗が無いときの角振動数} \end{aligned}}$$

これは定数係数線形微分方程式であるから、例によって $x = e^{\gamma t}$ と置けば解ける。代入して得られる 2 次方程式及びその解は

$$\begin{aligned} \gamma^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 &= 0 \\ \therefore \qquad \gamma &= -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \tag{1.20}$$

□ **場合分け**：

上記の表式から、減衰率 λ と ω_0 の相対的な大きさに応じて、次の 3 つの場合があることがわかる。

1. **摩擦が小さい場合： $\boldsymbol{\lambda < \omega_0}$**: このとき $\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ は虚数となるから、一般の実数解は（ルートの前の符号はどちらでも同じ実数解に導く）

$$\begin{aligned} x &= \Re\left(Ae^{-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}\right) \\ &= ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) \qquad (1.21)\\ \omega &\equiv \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < \omega_0 \qquad (1.22) \end{aligned}$$

の形となり、減衰しながら、ω_0 より小さな振動数 ω で振動する。

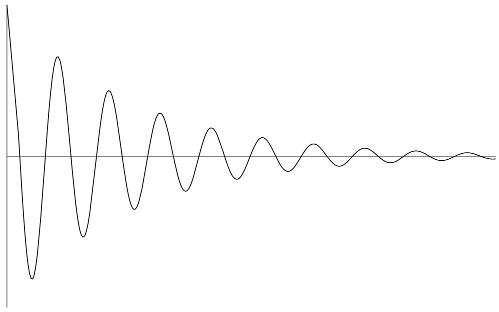


図 wave1-4

2. **摩擦が大きい場合：$\boldsymbol{\lambda > \omega_0}$**: このときの一般解は

$$x = c_+ e^{-(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t} + c_- e^{-(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t} \tag{1.23}$$

となり、振動せずに減衰する。これは**過減衰**と呼ばれる。

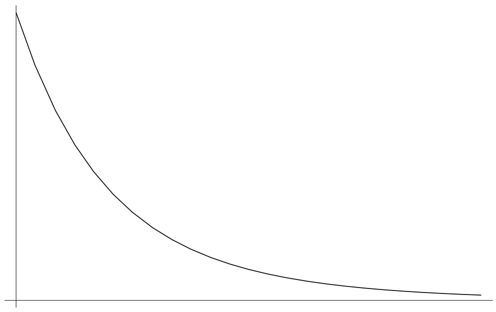


図 wave1-5

3. **$\boldsymbol{\lambda = \omega_0}$ の場合**:　このときには (1.23) の 2 項の指数が等しくなってしまうので、一見解は $x = e^{-\omega_0 t}$ しか無いように見えるが、実はそのほかにもう一つ $x = te^{-\omega_0 t}$ 型の解が存在する。

   これを見るには、$a \equiv \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ とおいて、a を 0 にする極限を注意深く調べる必要がある。a がうんと小さい場合、(1.23) は次のようになる：

$$\begin{aligned} x &\simeq e^{-\omega_0 t}\left(c_+(1+at) + c_-(1-at)\right) \\ &= e^{-\omega_0 t}\left(c_+ + c_- + (c_+ - c_-)at\right) \end{aligned} \tag{1.24}$$

   $c_\pm$ は任意であるから、特に、$c_\pm = \frac{1}{2}(c \pm (b/a))$ と置くと、$a \to 0$ の極限で第 2 項も有限に残り

$$x = ce^{-\omega_0 t} + bte^{-\omega_0 t} \tag{1.25}$$

   となる。すなわち、$te^{-\omega_0 t}$ を含むこの形が一般解になっているのである。このような場合を**臨界減衰**と呼ぶ。

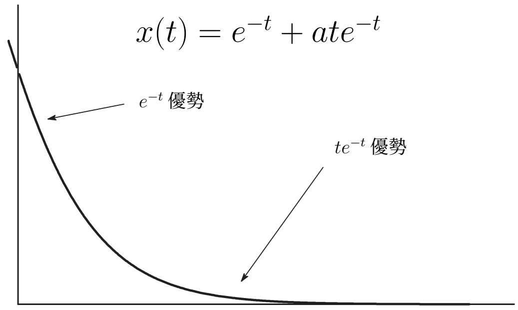


図 wave1-6

演習 1.2　$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ の解を、$x = f(t)e^{-\lambda t}$ の形に仮定し、$f(t)$ の方程式を導くことにより求めよ。

解:　　$\dot{x}, \ddot{x}$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (\dot{f} - \lambda f)e^{-\lambda t} \\
\ddot{x} &= (\ddot{f} - 2\lambda\dot{f} + \lambda^2 f)e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

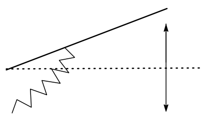
従って、方程式は

$$
\begin{aligned}
0 &= \Big((\ddot{f} - 2\lambda\dot{f} + \lambda^2 f) + 2\lambda(\dot{f} - \lambda f) + \omega_0^2 f\Big) e^{-\lambda t} \\
\therefore \qquad 0 &= \ddot{f} + (\omega_0^2 - \lambda^2) f \qquad (1.26)
\end{aligned}
$$

これは単振動型の方程式であり、簡単に解ける。特に臨界減衰の場合には方程式は $\ddot{f} = 0$ であるから、その解は $f = at + b$。従って (1.25) 型の解になる。

□ **過減衰、臨界減衰の実用例**：

身近な例として、ドアを静かにしめるいわゆるドアクローザーがある。この装置は、ドアを閉めるためのバネと、それを抑制しようとする抵抗からなっており、ちょうどドアが閉まる位置 ($x = 0$) でバネは自然長になる（すなわち力が働かない）ようにしてある。



- 抵抗がない場合には、ドアは本来閉まる位置の周りで角振動数 ω_0 で振動する。
- 抵抗が小さすぎると、減衰はするが振動もするので閉まる位置を行きすぎる。つまり、ドアを止める敷居がある場合には、敷居にぶつかってしまう。
- 従って臨界減衰、または過減衰が起こるくらいに抵抗を大きくする必要がある。こうすれば、x は単調に減衰して十分時間がたてば $x=0$、すなわちちょうどドアがしまるべき位置で止まる。

演習 1.3　微分方程式

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

に対して

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

と定義する。このとき、λ_0 が $f(\lambda)=0$ の重根ならば、$y = xe^{\lambda_0 x}$ もまた必ず解になることを示せ。

また、3 重根の時には $y = x^2 e^{\lambda_0 x}$ もまた解になることを示せ。

ヒント：　$x^n e^{\lambda x} = \frac{d^n}{d\lambda^n} e^{\lambda x}$ と書けることを利用せよ。

解:　　λ_0 を m 重根とすると、$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^m g(\lambda)$、但し $g(\lambda_0) \neq 0$、と書ける。この関数の特徴は、その $m-1$ 階導関数が $\lambda=\lambda_0$ で消えることである。さて、$y = x^{m-1}e^{\lambda x} = \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} e^{\lambda x}$ とおいて、微分方程式に代入すると、λ による微分は x に関する微分操作と交換するから、

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y \\ &= \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\left(f(\lambda)e^{\lambda x}\right) \end{aligned} \tag{1.27}$$

λ に関する微分を実行すると、明らかに $f(\lambda)$ は高々 $m-1$ 回しか微分されないから、$\lambda=\lambda_0$ とおくとゼロとなる。すなわち $y = x^{m-1}e^{\lambda_0 x}$ は微分方程式の解になっている。（さらに、$y = x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ はすべての $k \le m$ に対して解になることも明らか。）

□ **摩擦によるエネルギーのロス**:

振動子のエネルギーの時間変化を調べる。

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\right)\\ &= m\dot{x}\ddot{x}+kx\dot{x}\\ &= \dot{x}\left(m\ddot{x}+kx\right)\\ &= \dot{x}(-\alpha\dot{x}) = -\alpha\dot{x}^2 = -2\cdot\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 < 0\end{aligned}$$

これより摩擦力の為に系のエネルギーが失われていく様子がわかる。ここで、

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 \tag{1.28}$$

は「散逸関数 (dissipation function)」と呼ばれ、速度に依存したポテンシャルを表す。実際摩擦力は

$$F_{\text{まさつ}} = -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{x}} = -\alpha\dot{x} \tag{1.29}$$

のように、$\mathcal{F}$ の $\dot{x}$ による微分にマイナス符号を付けたもので書ける。