特集・超——meta, super, hyper, ultra,…

超対称性

風間洋一

● 1. プロローグ

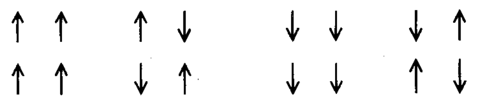
数年前に一般向けに著わした本の中で「超対称性」に触れる折りがあったとき，「超」というのはsuperの訳で，「未だかつて例を見なかった」というほどの意味だが，われわれの理解を「超えている」対称性と意地悪く解釈してもそう間違いではない，と書いたことがある．この後半の言葉遊びとみえる部分は，実はかなり真面目な述懐なのである．まず超対称性は量子力学を抜きにしては語れない概念であるため，一般読者がこれを理解するのはそう容易なことではない．一方，「われわれ」の中に専門家を含めるとまた別のレベルの難しさが現われる．超対称性は自然の基本理論を構築しようとするとき，あまりにも美しく魅力的な原理であるが，皮肉にもその「完全性」のためか自然はそれを巧妙に隠しているらしい．端的に言えば，今のところ超対称性が自然の基本法則と深く関わっているという直接的証拠はまったくないのである．これはわれわれ専門家にとって大きなジレンマであり，おそらく来世紀に引き継がれていく最大の謎のひとつであろう．

さて本稿の目的は，このあまり簡単ではないが魅力的な「超対称性」の本質をできるだけわかりやすく解説することにある．まったくのお話にしてしまわないために，高校三年～大学一年程度の簡単な数式を交えることにしたが，少しじっくり読んでいただければ十分に理解できるであろう．

● 2. 物理における対称性

「超」の意味を理解するためには，まず通常の対称性について少し語っておく必要がある．われわれは「球」を見るとき高い対称性を感ずるが，これは無意識のうちに中心を通る軸の周りに回転するという操作を想い描き，それに対して球はその形を変えないという不変性を美として認識するからに他ならない．このように，対称性とはなんらかの操作(これを「変換」という)に対する不変性を意味する．特に物理学においては，考えている系のエネルギーを変えないような変換が存在するとき系はその変換に対して対称性を持つという．

例を挙げよう．今，互いに平行に揃う傾向のある小さな磁石をいくつか用意し，簡単のため，各磁石は上下の方向しか向かないと仮定しよう．系のエネルギーはたとえば図1aのようにすべての磁石が上向きに揃ったときもっとも小さい．これに対して図1bのような配置は互いに逆向きの磁石があるので，1aの配置よりも高いエネルギーを持っている．さてここですべての磁石の向きを逆にする「変換」を考えよう．すると図1a，1bはそれぞれ1a′，1b′のようになる．これは明らかに以前の配置とは異なるが，それぞれの配置のエネルギーは，単にこちらが頭をひねって眺めただけであるから，明らかに変化しない．すなわちこの系には(個々の配置に依らない)「反転対称性」が存在する．



1a　　1b　　1a′　　1b′

次に，こうした対称性の概念が量子力学においてどのように表わされるかを見よう．

● 3. 量子力学における対称性

無論ここで量子力学の講義をする余裕はないが，これからの話に必要となる最小限の事柄を説明しておこう．量子力学の本質は，粒子の座標や運動量等の力学変数の値をすべて同時に確定することはできない，といういわゆる「不確定性原理」にある．したがってそれらの力学変数は通常の数で表わすわけにはいかず，すべて「演算子」として表現される．「演算子」というと難しく聞こえるが，以下の2×2の行列を使った簡単な例を見ればその感じがわかってもらえるであろう．

先にあげた小さな磁石の例を考える．この磁石は上向きか下向きの二つの状態を取り得るが，量子力学ではこうした状態にベクトル

$$|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を対応させる．外部磁場がない場合には，これらの状態は同じエネルギーを持つはずである．この二つのベクトルに次の行列 H (エネルギー演算子)を働かせてみよう．

$$H = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

すると，行列 H は単に単位行列を E 倍したものにすぎないから，二つの状態は共に E 倍される．量子力学ではこのことをもって各状態のエネルギーが E であることを表す．すなわち，状態にエネルギー演算子 H を働かせ，その応答としてエネルギーを「測る」のである．

この簡単な系には前節で述べた意味での「対称性」が存在することにお気づきだろうか．系のエネルギーを変えない変換があれば良いのだが，「二つの状態を入れ換える操作」は明らかにこの条件を満たしている．しかも，その入れ替えの操作自体もまた演算子で表すことができる．実際，次の行列 Q を働かせてみると確かに二つの状態は互いに入れ替わる．

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \quad Q|\downarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle$$

ここで重要なのは，この対称性の存在は Q と H が行列として「可換」すなわち $HQ = QH$ が成り立つことに起因していることである．(この例では H が単位行列に比例しており，単位行列はすべての行列と可換である．) これは次の式をみれば直ちにわかる：

$$H|\uparrow\rangle = E|\uparrow\rangle,$$

$$HQ|\uparrow\rangle = QH|\uparrow\rangle = QE|\uparrow\rangle = EQ|\uparrow\rangle$$

つまり，Q を働かせた状態のエネルギーを測ることは，可換性のため元の状態のエネルギーを測ることに等しいのである．この議論は H や Q がどんな形をしていても成り立つことに注目してほしい．こうして我々は次の重要な結果に到達する：「量子力学における対称性とは，エネルギー演算子 H と可換な演算子 Q が存在することで表わされる．さらに，このとき Q によって変換された状態は，元の状態と同じエネルギーを持つ．」

● 4. 超対称性 = 対称性のルート

少し難しい話が続いたが，いよいよ超対称性とは何かの説明に入ることにしよう．

1925年のウーレンベックおよびカウシュミットによる「電子スピン」の発見以後，自然界のすべての素粒子は(ある単位で測ったとき)整数，または半整数(1/2 の整数倍)の値を持つ「スピン」と呼ばれる各粒子に固有な角運動量を持つことがわかってきた．パイ中間子(スピン 0)や光子(スピン 1)を代表とする前者は「ボゾン」と呼ばれ，電子，陽子，中性子(いずれもスピン 1/2)をその典型とする後者は「フェルミオン」と呼ばれる．ボゾンは同一の状態にいくつでも存在できるのに対して，フェルミオンは同じ状態にただ一つしか入れないという量子力学

的制約があるため，ボゾンの集団とフェルミオンの集団はたいへん異なる性質を示す．たとえばボゾンの集団は夥しい数がもっともエネルギーの低い状態にたまるいわゆるボーズ-アインシュタイン凝縮を起こし相転移をひき起こすことができるが，フェルミオンの集団は決してそのような振舞いを示さない．

こうした非常に異なる性質を持つボゾンとフェルミオンを互いに変換しうるものとして結び付けようというのが超対称性の大胆な考えである．ボゾンを B，フェルミオンを F，これらを変換する超対称変換の演算子を Q と書くと，$QB = F$，$QF = B$ であるから，スピンの整数性，半整数性を考えると，Q 自体フェルミオン的な演算子でなければならぬことがわかる．そのようなもので系のエネルギー演算子 H と可換なものが存在するとき広い意味で系は超対称性をもつといわれる．

ここで前節で述べた量子力学における対称性の一般的性質を思い起こすと，直ちに次の重要な結論に導かれる．「超対称な理論ではエネルギーの等しいボゾンとフェルミオンの状態が常にペアで存在する．」この性質のために，超対称な場の量子論では画期的なことが起こる．すなわち，場の量子論の計算につきまとう「無限大」(の一部)が，ボゾンからの寄与とそれとペアをなすフェルミオンからの寄与で互いに相殺してしまうという現象である．これは超対称性の大きな魅力のひとつである．

後に述べる超重力や超弦理論，あるいは超対称統一理論などに現れる超対称性はもう少し限定された意味での超対称性である．すなわち，これらの理論ではエネルギー演算子が超対称変換の演算子 Q を用いて，$H = Q^2$ と書かれるのである．($Q(QQ) = (QQ)Q$ であるから，可換性は自動的に成り立つ．) 逆にいえば，超対称変換の演算子はエネルギー演算子の「ルート」という奇妙なものになっている．くわしく述べる暇はないが，H は H と可換であるという事実が示唆するように，実はエネルギー演算子自身，時間に関する平行移動という通常の種類の対称性変換を惹き起こす作用を担っており，その意味で超対称性は「対称性のルート」であると言えるのである．

思えばルートを開くという操作は古来新しい「数」の概念を次々に生み出してきた．有理数のルートを開くことで無理数が生じ，負の数のルートを開くことで虚数が生まれた．どれも初めは非常にわかりにくく抵抗のある概念であったが，現代ではなくてはならないものになっている．平行移動のルートという奇妙な概念も，いずれはより身近な概念として定着するのかも知れない．

超対称性とは何であるかが(望むらくは)わかったところで，最後にその歴史をごく簡単に紹介することにしよう．

● 5. 超対称性の歴史

超対称性の概念の発見に関しては異説があるが，その一つの起源は超弦理論にある．弦理論は従来の「点」粒子の場の概念を廃して，一次元的広がりをもった「弦」を理論の基本におくもので，陽子，中性子，あるいは中間子といった「ハドロン」と呼ばれる強い相互作用をする一連の素粒子を統一的に記述するものとして，1970 年に南部(陽一郎)等によって提唱された．この理論では，さまざまなハドロンは弦のいろいろな振動状態として理解される．当初の弦理論は，中間子等のボゾンのみを記述するものであったが，翌年ヌヴー，シュワルツ，ラモンによって陽子等のフェルミオンも併せて記述できるフェルミ弦の理論が作られた．そして同年ジェルヴェと崎田(文二)はこの理論の中にボゾンとフェルミオンの交換に対する対称性，すなわち広い意味での超対称性が存在することを見つけたのである．その意味でフェルミ弦の理論は最初の超弦理論である．

しかし，超対称性が脚光を浴び始めたのは，1974 年，その原理を一般の場の理論に適用できる形で定式化し，前節で述べた時間に関する平行移動のルートの意味を持つ超対称性を導入したヴェスとズミノの論文からといってよい．その後ほどなくして先に述べた無限大相殺のメカニズムが認識され，これを利用する企てがいくつかの方面で行なわれるようになった．ひとつは，1976 年にアメリカとヨーロッパの二つのグループによってほぼ同時に創始された「超重力理論」である．この理論はアインシュタインの重力理論に量子力学を適用する際に現れる制御

不可能な無限大の困難を超対称性を組み込むことによって一気に解決しようという野心的な試みであった．さらに，複数の互いに関係した超対称性変換を組み込むことによって，従来独立に扱われてきた重力場とさまざまな物質場を統一的に扱う「超重力統一理論」も精力的に研究された．これらの壮大な目論見は結局完遂されないのだが，その成果は現在の超弦理論の一部として生きている．

この間，超弦理論自体も画期的な変貌を遂げた．すなわち，もとのハドロンを記述する理論としてではなく，より基本的な統一理論としての新しい解釈が提唱され，長い困難な時代を経て，1984年のグリーンとシュワルツによる超弦理論の完全な有限性を示唆する論文以後，究極の統一理論の期待を担って再び素粒子理論の最前線に躍りでた．以後現在に至るまでの発展および困難についてはとてもここで述べる余裕がないが，そもそも超弦理論の真に満足のいく定式化がまだないこともあって，この理論における超対称性の本質的な役割は明確に捉えられていない段階にあるといってよい．

無限大相殺のメカニズムを利用するもうひとつの発展の方向は，いったん重力は脇において，より現実的な，実験で検証できる範囲での超対称統一理論をつくる企てである．実験との比較を真剣に考える際避けて通れないのが，せっかく持ち込んだ超対称性をいかにしてうまく破るかという皮肉な問題である．もし超対称性が厳密に成り立つのならば，電子，陽子といったフェルミオンに対してそれとペアになる同一質量のボゾンが存在しなければならないが，明らかにそのような粒子は観測されていない．したがって，超対称性を少し壊さねばならないのだが，その良い性質を保ちながらこれを行なうのはかなり難しい．有望な理論の候補はあるが，その正否は将来の加速器実験の結果をみなければ判断できない状況である．

以上，超対称性の概念を素粒子物理学を中心に解説してきたが，実はそれは数学におけるコホモロジーの概念とも密接に関係している．これについてはまた機会があれば述べてみたい．

（かざま よういち／東京大学）