

第4章 二体系の運動

これまでは、保存力（すなわち $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ と書ける力）が働く場合の1粒子の運動を考察してきたが、無論自然界に現れるほとんどのシステムは多体系であるから、それらを解析する方法を考える必要がある。この章ではそのうちの最も簡単な場合、すなわち2体系の運動を考察する。

手順：

1. まず2体系をその重心の運動とその周りの相対運動に分離する。これにより、2体問題を二つの1体問題に分解することができる。
2. さらに、働く力が（重力やクーロン力のような）中心力の場合には3次元空間の1体問題を1次元問題に還元することができる。これはしばしば解析的に解くことが出来る。

4.1 二体問題の一体問題への還元

4.1.1 重心運動と相対運動の分離

□ 重心 (center of mass or center of momentum):

質量 m_1, m_2 を持つ二つの質点系の、保存力 $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ のもとでの運動を考えよう。

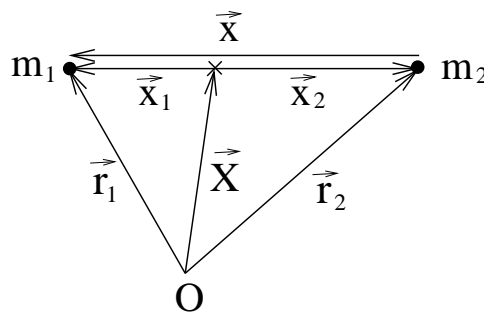


図 mb41-1

一般に質点の位置ベクトルの原点はどこにとっても良いが、これを重心と呼ばれる特殊な点にとると、その点から見た全運動量 \vec{P}_{tot} をゼロにす

ることが出来る。もとの原点から測った重心の位置ベクトルを \vec{X} とし、そこからの質点 1,2 の位置ベクトルを \vec{x}_1, \vec{x}_2 とすると、

$$\vec{x}_1 = \vec{r}_1 - \vec{X}, \quad \vec{x}_2 = \vec{r}_2 - \vec{X} \quad (4.1)$$

と書ける。全運動量は

$$\begin{aligned} \vec{P}_{tot} &= m_1 \frac{d\vec{x}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{x}_2}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

これをゼロとするには

$$m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

が成り立てば 十分。これを元の変数で書くと

$$\begin{aligned} 0 &= m_1(\vec{r}_1 - \vec{X}) + m_2(\vec{r}_2 - \vec{X}) \\ &= m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 - (m_1 + m_2) \vec{X} \end{aligned} \quad (4.4)$$

これを \vec{X} について解けば、重心は

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \\ M &\equiv m_1 + m_2 = \text{全質量} \end{aligned} \quad (4.5)$$

で得られる。

□ 相対座標：

元々粒子の位置は \vec{r}_1, \vec{r}_2 という二つのベクトルで表されていたのであるから、 \vec{x}_1, \vec{x}_2 及び \vec{X} を用いる記述には 重複 がある。実際、図 mb41-1 より明らかのように、 \vec{x}_1 と \vec{x}_2 は比例している。具体的に \vec{x}_a を計算してみると

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{r}_1 - \vec{X} = \frac{1}{M} ((m_1 + m_2) \vec{r}_1 - m_1 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2) \\ &= \frac{m_2}{M} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{x}_2 &= \vec{r}_2 - \vec{X} \\ &= -\frac{m_1}{M} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

となり、これらは独立ではない。そこで、相対座標 \vec{x} を

$$\vec{x} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (4.7)$$

として定義すると

$$\vec{x}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{x}, \quad \vec{x}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{x} \quad (4.8)$$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{x} + \vec{X} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{x} + \vec{X} \quad (4.9)$$

と書ける。

□ 運動エネルギーの分離：

2 粒子系の運動エネルギーを重心および相対座標で表してみよう。

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{x}}_a^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \left(\dot{\vec{x}}_a + \dot{\vec{X}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{x}}_a^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_a m_a \right)^2 \dot{\vec{X}}^2 + \sum_a m_a \dot{\vec{x}}_a \cdot \dot{\vec{X}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{x}}_a^2 + \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \vec{P}_{tot} \cdot \dot{\vec{X}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{x}}_a^2 + \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

すなわち、ちょうど $\vec{P}_{tot} = 0$ が成り立つ場合には、相対運動と重心運動の運動エネルギーが綺麗に分離することがわかる。

□ 換算質量の概念：

相対運動の運動エネルギーの部分を、完全に相対座標 \vec{x} による記述に直して見よう。(4.8)を用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{x}}_a^2 &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{M^2} \dot{\vec{x}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2}{M^2} \dot{\vec{x}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{x}}^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

を得る。これはちょうど次の質量 μ を持つ 1 粒子の運動エネルギーの表式に等しい：

$$\begin{aligned} \mu &\equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ \therefore \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

この質量を換算質量 (reduced mass) と言う。

演習 4.1 $m_1 > \mu, m_2 > \mu$ を示せ。

換算質量の性質

- 上記演習問題からわかるように、換算質量は各々の粒子の質量より常に小さい。特に同種粒子の場合には

$$\mu = \frac{1}{2}m$$

この理由は、 $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ の二倍の長さを持つ \vec{x} を用いている為である。

- 特に片方の粒子の方がもう片方よりうんと重い場合、例えば $m_1 \gg m_2$ の場合、には

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \simeq m_2 \quad (4.13)$$

となり、換算質量は軽い方の粒子の質量にほぼ一致する。

例：水素原子の場合。 $m_1 = m_P, m_2 = m_e, m_P \simeq 2000m_e$ 。従って、陽子はほとんど動かずに電子のみがその周りを運動するという直観的描像と一致する。

- 質量の逆数に関する式が簡明になる理由。重心運動の分離の条件を運動量で表すと $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ 。従って $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2, p_1^2 = p_2^2$ 。ここで独立な運動量を

$$\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

ととると、運動エネルギーは

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p^2 = \frac{1}{2\mu} p^2$$

すなわち、運動量を用いて表せば質量の逆数の間の関係式が自然に理解される。

演習 4.2 月と地球の二体系を考える。月の半径と地球の半径の比を ρ とするときこの系の換算質量は月の質量の何倍になるか。但し月の表面での重力は地球表面でのその約 $1/6$ である。

□ 2 粒子間の距離のみによる相互作用と運動方程式の分離：

次に、相互作用を考えよう。重力やクーロン力のように、自然界に存在する基本的な 2 体力は、2 粒子間の距離のみによる保存力である。すなわち

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V, \quad V = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = V(|\vec{x}|) \quad (4.14)$$

これは重心座標を含まないことに注意しよう。そのため重心の運動は力の影響を受けず、自由粒子の運動、すなわち等速直線運動をすると考えられる。

実際運動方程式を重心および相対運動に分離して見よう。各粒子の運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}} \quad (4.15)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_2} = +\frac{\partial V}{\partial \vec{x}} \quad (4.16)$$

$$\text{但し} \quad \frac{\partial V}{\partial \vec{x}} \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3} \right)$$

辺々加えれば

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = M \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = 0 \quad (4.17)$$

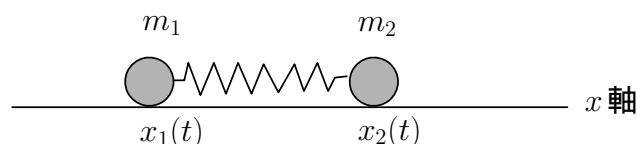
従って確かに 重心は自由粒子の運動方程式に従う。

相対座標については、上記 2 式をそれぞれ m_1, m_2 で割って辺々引き算すると、容易に

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} &= -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\partial V}{\partial \vec{x}} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial V}{\partial \vec{x}} \\ \therefore \mu \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

を得る。これは 相対運動が 1 粒子問題に還元された ことを示している。

演習 4.3 図のように、質量 m_1, m_2 を持つ二つの質点 1,2 がバネ定数 k 、自然長 l のバネにつながれている。質点 1,2 の位置を $x_1(t), x_2(t)$ と記し、運動は x 軸方向にのみ起こるとして次の問に答えよ。



- (1) この系のポテンシャルエネルギーを求めよ。
- (2) 質点 1,2 の運動方程式を書け。
- (3) 運動方程式を重心運動と相対運動に分離せよ。
- (4) (3) の分離された運動方程式を解くことにより、 $x_1(t), x_2(t)$ の一般解を求めよ。

4.2 中心力場の問題の一般的性質

前節で述べたように、相互の距離のみによるポテンシャルの中での二体問題は換算質量を持った一粒子が中心力のもとで運動する問題に帰着する。

4.2.1 中心力場の問題の特徴

このような系は次のような重要な性質を持つ：

1. 角運動量の保存: これについてはすでに述べたが、以下でケプラーの第二法則という形の解釈を与える。
2. 平面内運動: 保存する角運動量を $\vec{x} \times \vec{p} = \vec{\ell}$ と書き、その方向を z 軸方向にとるとする。すると $\vec{x} \times \vec{p}$ は \vec{x} に垂直な方向のベクトルである。逆に言えば \vec{x} は $\vec{\ell}$ に常に垂直、すなわち運動は $x-y$ 平面内にとどまることがわかる。

演習 4.4 $\vec{x} \cdot \vec{\ell} = 0$ を具体的に計算で示せ。

□ 角運動量保存則の解釈: ケプラーの第二法則：

角運動量保存則は、Kepler の第二法則すなわち「面積速度一定の法則」という形でも解釈される。

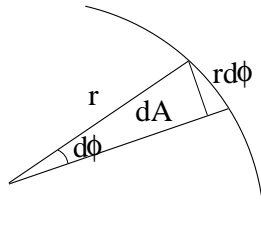


図 mb42-1

図より、時間 dt 間に動径ベクトルが覆う面積 dA 及びその時間変化率は

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\phi$$

$$\therefore \dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}$$

これは保存する角運動量 $\ell = mr^2\dot{\phi}$ に比例する。ゆえ

$$\dot{A} = \text{面積速度} = \frac{\ell}{2m} = \text{一定}$$

Kepler は惑星の運動の場合 (すなわち $F \sim 1/r^2$) にこの法則を見いだしたが、上の議論から、この法則は 任意の中心力場に対して成り立つことがわかる。

補: Kepler の三法則 (~ 1610)

1. 惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を運行する。
2. 面積速度一定の法則
3. (周期)² \propto (長軸)³

第一及び第三法則は距離の二乗に反比例する力の場合にのみ成立する。

4.2.2 一次元問題への還元

中心力場の問題のもう一つの大きな特徴は、それがポテンシャルの形によらず一次元問題に還元されることである。

まず、角運動量保存から、 ϕ を r で表すと、

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{\ell}{mr^2(t)} \\ \therefore \phi &= \int dt \frac{\ell}{mr^2(t)}\end{aligned}$$

すなわち、 $r(t)$ がわかれば、 $\phi(t)$ は積分によって求まる。

一方 $r(t)$ に対する方程式は3章で導いたように、

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{dV}{dr} \quad (4.19)$$

で与えられるから、 $\dot{\phi}$ を消去すると

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} \quad (4.20)$$

となる。第1項は遠心力を表す。

実は、この方程式に \dot{r} を掛けたものは、エネルギー保存則そのものを表している。両辺に \dot{r} を掛けると

$$\begin{aligned}LHS &= m\dot{r}\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \right) \\ RHS &= \frac{\ell^2}{mr^3} \frac{dr}{dt} - \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{\ell^2}{2mr^2} - V(r) \right) \\ \therefore LHS - RHS &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) \right) \quad (4.21)\end{aligned}$$

一方、エネルギーの表式は

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \right) + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) \quad (4.22)\end{aligned}$$

であるから、(4.21) は、 $dE/dt = 0$ 、すなわちエネルギー保存を表していることになる。

遠心力によるエネルギーとともにのポテンシャルエネルギーを合わせたもの

$$V_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) \quad (4.23)$$

は有効ポテンシャルと呼ばれる。すなわち、 r 方向の運動は、有効ポテンシャル V_{eff} 中での一次元問題に還元される。

さて、エネルギーの表式を \dot{r} について解くと

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))} \quad (4.24)$$

± の符号は運動の向きによる。これを積分すると

$$\int dt = t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}}$$

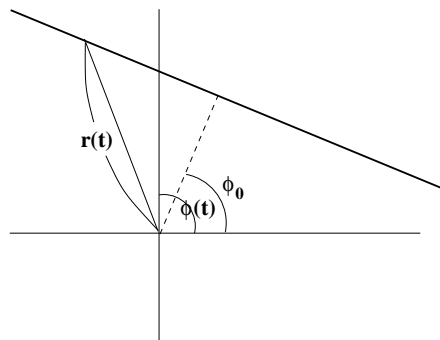
この積分が実行できれば、 t が r の関数として求まり、その逆関数として $r(t)$ が求まる。

4.2.3 軌跡を直接求める微分方程式

上の手続きに従えば $r(t)$ さらに $\phi(t)$ が求まり、それから t を消去することによって、軌跡 $r = r(\phi)$ を得ることができるが、これは煩雑である。しかし、実はうまく軌跡を直接決定する微分方程式を簡単に求めることができる。これはあとでケプラー問題に応用される。

□ 平面極座標系での直線運動の記述：

この方法を理解するために、まず自由粒子の等速直線運動が平面極座標系でどう表されるかを考察する。



図を参照すると、極座標系では直線は

$$r(t) \cos(\phi(t) - \phi_0) = \text{const.} = \text{垂線の長さ}$$

あるいは

$$\frac{1}{r} = a \cos(\phi - \phi_0) \quad (4.25)$$

と表せる。この表式は、 r 自体ではなく、 $\rho = 1/r$ を ϕ の関数と見なす方が良いことが示唆される。

□ 軌跡を求める方程式とその簡単な解：

これをヒントとして、運動方程式から軌跡を求める方程式を導こう。方針は $\phi = \phi(t)$ を通じて、時間微分を ϕ 微分 に書き換えることである。 t の任意関数 $f(t)$ を $f(t(\phi))$ と考えて ϕ の関数と見なすと、

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{df}{d\phi} = \dot{\phi} \frac{df}{d\phi} \quad (4.26)$$

さらに、角運動量保存より、 $\dot{\phi} = \ell / (mr^2) = \ell \rho^2 / m$ と書けるから、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\ell \rho^2}{m} \frac{df}{d\phi} \quad (4.27)$$

これを dr/dt に適用すると

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\ell \rho^2}{m} \frac{d}{d\phi} \frac{1}{\rho} = -\frac{\ell}{m} \frac{d\rho}{d\phi}$$

さらにもう一度同じ手続きで t 微分すると、

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\ell}{m} \rho^2 \frac{d}{d\phi} \frac{dr}{dt} = \frac{\ell}{m} \rho^2 \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{\ell}{m} \frac{d\rho}{d\phi} \right) = -\frac{\ell^2}{m^2} \rho^2 \frac{d^2 \rho}{d\phi^2}$$

これを r に関する運動方程式 (4.20) に適用すれば、

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= -\frac{\ell^2}{m} \rho^2 \frac{d^2 \rho}{d\phi^2} \\ &= \frac{\ell^2 \rho^3}{m} + F(r) \end{aligned} \quad (4.28)$$

従って

$$\frac{d^2\rho}{d\phi} + \rho = -\frac{m}{\ell^2}r^2F(r) \quad (4.29)$$

を得る。

特徴：

- 特に力 $F(r)$ がゼロの場合には、ちょうど調和振動子の方程式の形になる。従って解は $\rho = a \cos(\phi - \phi_0)$ 型となり、まさしく直線運動を表す。
- 力が $F(r) \propto 1/r^2$ 、すなわち重力やクーロン力のように距離の2乗に反比例する場合には、方程式の右辺は定数となるから、 ρ の定義を定数だけずらせば取り除ける。従ってこの場合の解は

$$\rho = \rho_0 + a \cos(\phi - \phi_0) \quad (4.30)$$

型となる。次節で見ると、これは惑星の軌跡を表している。

4.3 Kepler 問題

中心力場の中でも、距離の二乗に反比例する力の場合には特に重要であり、Kepler 問題と呼ばれる。

引力の場合： 重力、異符号の荷電粒子に働くクーロン力

斥力の場合： 同符号の荷電粒子に働くクーロン力

以下では例として引力の場合を扱うことにする。ポテンシャル、及び力を

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0$$
$$F_r = -\frac{dV}{dr} = -\frac{\alpha}{r^2}$$

と書くことにする。一般論で見たように、 r 方向の運動は有効ポテンシャル

$$V_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

のもとでの一次元運動になるから、このポテンシャルの形とその特徴を詳しく調べよう。

まずポテンシャルが最小になる r の値 r_0 、及びその時のエネルギー値 E_0 を求める。

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\ell^2}{mr^3} = 0$$

$$\therefore r_0 = \frac{\ell^2}{\alpha m}, \quad E_0 = -\frac{m\alpha^2}{2\ell^2} \quad (4.31)$$

ポテンシャルの図を画くと

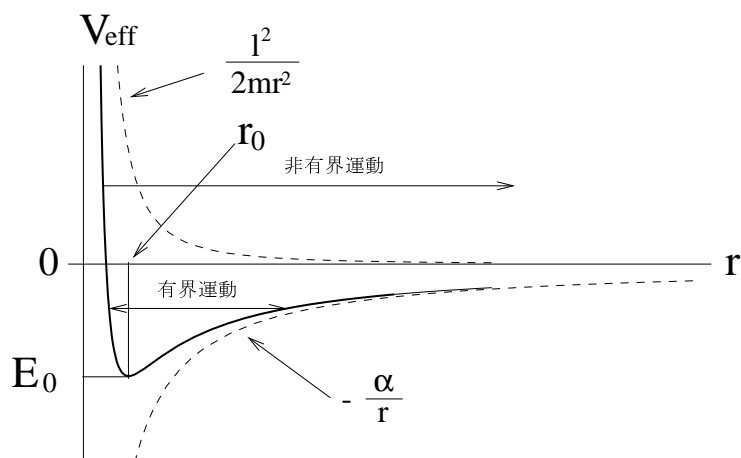


図 mb43-1

明らかに、 E の符号によって運動の性質が異なることが見て取れる。

- $E \geq 0$: 非有界運動。但し「遠心力の壁」($\ell^2/(2mr^2)$) により r_{min} が常に存在。
- $E < 0$: 有界運動。 r_{min} 及び r_{max} が存在。角運動量が一定であることを考えると、図より軌跡が楕円になることが予想される。特に $E = E_0$ の場合には、 $r = r_0 = const.$ 、すなわち円運動になる。

□ Kepler 運動の軌跡 :

前節で述べた軌跡を直接求める方程式は Kepler 問題の場合特に有効である。方程式を再掲すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{d\phi^2} + \rho &= -\frac{m}{\ell^2}r^2F(r) \\ \rho &= \frac{1}{r}\end{aligned}$$

距離の二乗に反比例する力の特殊性は右辺が定数になることに現れる。従って

$$\frac{d^2\rho}{d\phi^2} + \rho = \frac{m\alpha}{\ell^2} = \frac{1}{r_0} \equiv \rho_0$$

これは、 $\rho - \rho_0$ に関してちょうど単振動の式になっているから、解は

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + A \cos(\phi - \phi_0) \\ &= \rho_0 (1 + e \cos(\phi - \phi_0))\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{r_0}{r} = 1 + e \cos(\phi - \phi_0)$$

ここで e は eccentricity (離心率) と呼ばれ、その意味は以下で明らかになる。

□ 離心率 e のエネルギーによる表式 :

角度の測り方を $\phi = 0$ のとき $r = r_{min}$ となるようにとると、 $e > 0$ としてよい。まず 有界運動の場合 を考える。ポテンシャルの図より、 $r = r_{min}$ および $r = r_{max}$ で r 方向の速度はゼロとなり、全エネルギー E はすべてポテンシャルエネルギーの形になる。従って

$$E = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\ell^2}{2m\alpha r}$$

有界運動では $E \neq 0$ ゆえ、これは次の r に関する二次方程式となる。

$$r^2 + \frac{\alpha}{E}r - \frac{\ell^2}{2mE} = 0 \quad (4.32)$$

これは次の関係式に着目すると、見やすい形にできる：すでに述べたように

$$E_0 = -\frac{\alpha^2 m}{2\ell^2}, \quad r_0 = \frac{\ell^2}{m\alpha}$$

これらを用いると方程式 (4.32) に現れる量を次のように表せる：

$$\alpha = \frac{\ell^2}{mr_0} = -2E_0 r_0$$

$$\frac{\ell^2}{2m} = -E_0 r_0^2$$

従って、 $A \equiv -E/E_0$ とおくと、(4.32) は

$$r^2 + 2\frac{r_0}{A}r - \frac{r_0^2}{A} = 0 \quad (4.33)$$

と書ける。根と係数の関係より、

$$r_{max}r_{min} = -\frac{r_0^2}{A}$$

然るに、軌道の式より明らかに

$$r_{min} = \frac{r_0}{1+e}, \quad r_{max} = \frac{r_0}{1-e} \quad (4.34)$$

従って

$$r_{max}r_{min} = \frac{r_0^2}{1-e^2} = -\frac{r_0^2}{A}$$

$$\therefore 1 - e^2 = -A$$

$$\therefore e = \sqrt{1+A}$$

すなわち e がエネルギーの関数として次のように求まる ($E_0 < 0$ に注意):

$$e = \sqrt{1 - \frac{E}{E_0}}$$

すなわち、離心率は $E = E_0$ 、すなわち円運動のときに最も小さな値 $e = 0$ をとり、それからはずれていくに従ってその値は増大する。有界運動と非有界運動の境目である $E = 0$ で $e = 1$ となり、非有界運動に対しては $e > 1$ となる。

演習 4.5 この表式は非有界運動の場合にも成立することを示せ。(ヒント：この場合には、 r_{min} しか存在しないが、これは上記の二次方程式から直接求めることができる。)

□ 軌跡の幾何学的意味：

デカルト座標に直してみると分かりやすい。

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{r} &= 1 + e \cos \phi \\ r_0 &= r + e r \cos \phi = r + ex \\ \therefore r &= r_0 - ex \\ r^2 &= x^2 + y^2 = (r_0 - ex)^2 \\ &= r_0^2 - 2er_0x + e^2x^2 \end{aligned}$$

従って、次の二次曲線を表す方程式を得る：

$$(1 - e^2)x^2 + 2er_0x + y^2 = r_0^2$$

□ 有界運動の場合：

$e < 1$ すなわち $E < 0$ の場合は、楕円を表す。簡単な計算より

$$\left(\frac{x + ae}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ここで

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_0}{1 - e^2} = \text{長軸の半分の長さ} \\ b &= \frac{r_0}{\sqrt{1 - e^2}} = \text{短軸の半分の長さ} \\ r_{min} &= a - ae, \quad r_{max} = a + ae \end{aligned}$$

これを図示すると

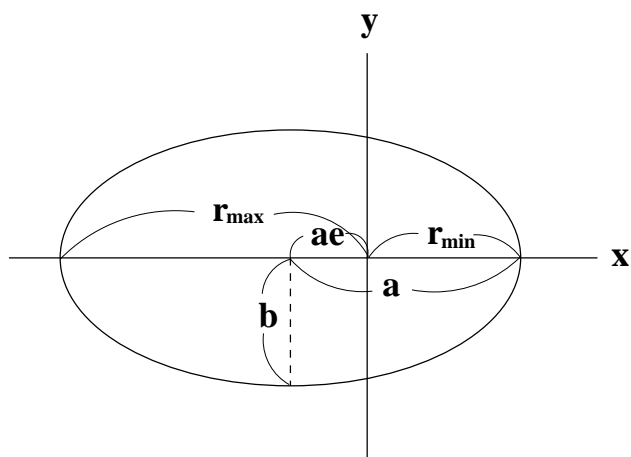


図 mb43-2

□ 楕円運動の周期と Kepler の第三法則 :

周期 T を求めるには、面積速度一定の法則を一周期に渡って積分する。

$$\begin{aligned} \ell &= 2m\dot{A} \\ \therefore 2mA &= \ell T, \quad A = \pi ab = \text{楕円の面積} \end{aligned}$$

a 及び b の表式より $b = \sqrt{r_0}a^{1/2}$ であるから、

$$T = \frac{2\pi m}{\ell} \sqrt{r_0} a^{3/2} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{3/2}$$

従って、周期は長軸の長さの $3/2$ 乗に比例する、という第三法則が得られる。

演習 4.6 (i) $E = 0$ 、及び (ii) $E > 0$ の場合の運動を調べ、それぞれ放物線、及び双曲線になることを示せ。