ゲージ対称性と現代物理学

風間 洋一

1. プロローグ

物理学を学び研究するとき，我々はしばしばそこに現れる法則や体系に簡潔にして高度な「美」を感じて感動することがある．この「美」の正体をいい当てるのは簡単ではないが，その多くは対象やそれを記述する理論自体の持つ「対称性」に起因すると思われる．例えば，ギリシャ以来人間が円や球に美を感じてきたのは，それが中心の周りの回転という操作に対して変わらないという「回転対称性」を持つからであるといえるだろう．

物理学の発展の歴史は自然が驚くべきほど豊富な対称性を内包していることを次々と明らかにしてきた．そして，この小稿で解説する「ゲージ対称性*1)」は，ある意味で最も高度な対称性であるといえる．それは，相対論と量子力学という現代物理学の二つの基本的な枠組みの中で自然を理解する上で最も重要な考え方であり武器であるといっても過言ではない．しかし，それは高度なゆえに，感覚的に捉えにくい対称性でもある．ゲージ対称性の起源とその発展の歴史は次章以下で具体的に述べてゆくが，そこに見られるゲージ対称性の特徴は大きく分けて二つある．

一つは，ゲージ変換と呼ばれるこの対称性の基本操作は，直接物理的に観測できない“余分な”自由度に働き，物理量（観測量）はゲージ変換で変わらないことである．これは一見無駄のように見えるが，実は物理学の「幾何学化」という深い考え方を可能にする．例えば，平面図形を座標系を導入して記述する際，その幾何学的な性質（辺の長さや面積など）は明らかに座標系の取り方に（すなわち座標変換に）よらない．このように，幾何学とはあるクラスの変換に対して不変な性質を取り扱う学問のことであり，ゲージ変換に対する不変量を観測量とする「ゲージ理論」はその意味で幾何学を定義するのである．かの有名なアインシュタインの一般相対論はその先駆的な例となっている．

もう一つの重要な特徴は，ゲージ対称性の要請が理論のダイナミックス自体を強く規定する働きを持つことである．これは「ゲージ原理」と呼ばれ，次章以下で詳しく解説するが，現代物理学の基礎理論がすべて広い意味のゲージ理論で記述されているのはこの働きによるものであることが大きい．

とにかく，ゲージ対称性抜きに現代物理学は語れない．それは様々な意匠のもとに，あるときは顕現しあるときは巧妙に隠蔽された形で自然界の美を統一的に演出するのである．

*1) ゲージ（gauge）とは「測る」という意味であるが，その由来は次章において明らかになる．

2. ゲージ対称性の起源

2.1 マックスウェル電磁気学のゲージ対称性

通常「ゲージ対称性」あるいは「ゲージ変換」という言葉と初めて出会うのは，大学でマックスウェルの電磁気学を履修するときであろう．それは電場 $\vec{E}$ や磁場 $\vec{B}$ がスカラー（静電）ポテンシャル ϕ やベクトルポテンシャル $\vec{A}$ の微分で表せることを述べる際に併せて説明される．しかし，講義のレベルによってはゲージ対称性には触れない場合も多いかもしれない．実際マックスウェル方程式自体には $\vec{E}$ と $\vec{B}$ しか現れないのであるから，強いて触れる必要もないのである．だが，その一見陰に潜んでいるだけとしか思えないゲージ対称性こそ，現代物理学の根幹を貫く最も重要な概念の一つとなっていくのである．

マックスウェルの電磁気学は次の４本の美しい基本

方程式で記述される：

$$\text{(I)} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \qquad \text{(II)} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &\text{(III)} \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,, \\ &\text{(IV)} \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\,. \end{aligned} \qquad (2)$$

各式の意味は既知として，電磁場のポテンシャルがどのように導入されるかを簡単に復習しておこう．まず (II) から，(少なくとも局所的には) $\vec{B}$ はベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を用いて，$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ という形に書けることがわかる．これを (III) に代入して整理すると，$\vec{\nabla}\times(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = 0$ が得られるから，括弧内は，スカラーポテンシャル ϕ を導入して，$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi$ と表せる．まとめると

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (3)$$

と書けることになる．

こうして導入されるポテンシャルには不定性があるというのが「ゲージ対称性」の最も初等的な現れである．実際，Λ を勝手な関数として，$\vec{A}$ に $\vec{\nabla}\Lambda$ を加えても $\vec{B}$ は不変であり，また同時に $\phi \to \phi - (\partial\Lambda/\partial t)$ とすれば，$\vec{E}$ も変わらない．即ち

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \quad \phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \qquad (4)$$

という「ゲージ変換」に対して電磁場が不変であることが容易に確かめられる．この変換は相対論的な 4 次元記法を用いるとより簡潔にまとめることができる．まず，時間座標 $ct = x^0$ (c は光速度) と空間座標 (x^1, x^2, x^3) を併せて x^μ ($\mu = 0 \sim 3$) と記し，これらに関する微分を $\partial/\partial x^\mu = \partial_\mu$ と略記する．そして，4 元ポテンシャルを $A_\mu \equiv (-\phi/c, A_i)$ と定義すると，(4) は

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda \qquad (5)$$

と書けるのである[*2]．

2.2 ゲージ対称性の認識：ワイルの理論

こうしてマックスウェル理論を不変にするゲージ対称性の存在がわかったが，これだけではその意味と重要性は全くわからない．事実マックスウェルの理論が構築されてから数十年もの間，この対称性はその存在すら認識されることはなかったのである．その間電磁気学はアインシュタインの特殊相対性理論 (1905 年) を生み出す原点となり，さらにそれは革命的な重力理論である一般相対論 (1916 年) に拡張されるに至った．そしてその 2 年後の 1918 年，全く予期せぬ形で電磁気学におけるゲージ対称性がワイル (H. Weyl) によって初めて認識されることになる．

ワイルは，一般相対論を少し（しかし大胆に）拡張することによって，重力と電磁気を融合する理論を作ろうとした．一般相対論では，重力の効果は各点各点で物理的な長さや角度を定義する「計量」と呼ばれる場 $g_{\sigma\rho}(x)$ によって記述される[*3]．計量の時空的な変化は長さや角度の歪曲を引き起こし，光や物質がその曲がった空間に沿って運動することを重力の効果と捉えるのである．ワイルの提案した拡張は，電磁場中ではこの計量が，(α を定数，x_0 を勝手に選んだ基準点として)

$$g_{\sigma\rho}(x) \to W(x)g_{\sigma\rho}(x)\,, \quad W(x) \equiv e^{\alpha\int_{x_0}^{x} A_\mu(y)dy^\mu} \qquad (6)$$

のように変更を受け，しかも観測量は計量に勝手な正の関数を掛ける (すなわち各点各点で長さのスケールを変える)「ワイル変換」に対して不変である，というものであった．今この勝手な関数を便宜上 $e^{\alpha(\Lambda(x)-\Lambda(x_0))}$ の形にとると，$\Lambda(x) - \Lambda(x_0)$ は $\int_{x_0}^{x}\partial_\mu\Lambda(y)dy^\mu$ と書き直せるから，結局これを掛ける効果は，電磁ポテンシャルに対して $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda$ という置き換えをすることと同値である．これはまさしくマックスウェル理論で現れたゲージ変換に他ならない！ しかもこの変換で不変な量は $\vec{E}$ 及び $\vec{B}$ であったから，ワイルの提案によればそれこそが物理的な観測量であるということになる．こうして，計量という長さを「測る」(gauge する) 際の基本量に関係して「ゲージ」対称性が現れてきたのである．

しかし，この提案はすぐさまアインシュタインの痛烈な批判を浴びる．積分 $\int_{x_0}^{x} A_\mu(y)dy^\mu$ は x_0 と x を結ぶ経路に依存するから，電磁場が存在する場合には，ある位置に在る物の長さや時計の進み方がそれらがどのような経路でそこに至ったかによることになってしまい，観測事実に反するというのである．

*2) 相対論を学んでいない読者は，記法に惑わされずに論旨に集中していただけば良い．但し，相対論では $\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu$ を和記号 $\sum$ を省略して $a_\mu b^\mu$ のように記すことだけは覚えておいて欲しい．

*3) 勝手な座標系 x^μ をとり，そこでの無限小離れた 2 点を結ぶベクトルを dx^μ とするとき，その 2 点間の物理的な距離の 2 乗は $ds^2 = g_{\sigma\rho}(x)dx^\sigma dx^\rho$ で与えられる．

こうして，ワイルの大胆な提案とゲージ対称性のアイデアには致命的な欠陥があることがわかってしまったのであるが，その基本的な構想は死にはしなかった．それは量子力学の構築に伴って，似てはいるが根本的に異なった概念として復活を果たすのである．

3. 量子力学とゲージ対称性

3.1 ゲージ対称性の正しい解釈

ワイルの論文がでた後，シュレーディンガー（E. Schrödinger）は，ワイルの因子 W 中の $\int A_\mu dx^\mu$ なる量の量子力学における振る舞いの考察を経て，1926年量子力学の基礎を築いた有名な論文中で，電荷 e を持つ荷電粒子と電磁場の相互作用が，波動関数に働く微分 ∂_μ を $D_\mu \equiv \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu$ に置き換えることで導入されるという規則を提案した*4)．

こうした発展を土台として1927年ロンドン（F. London）は，量子力学と古典力学をつなぐハミルトン–ヤコビ理論の考察から，ワイルの因子 W に現れた定数 α は $-ie$ ととるべきで，従って W は絶対値が1の複素数であり，それは計量ではなく荷電粒子の波動関数 ψ に掛かるものと解釈すべきであることを提唱した．すなわち ψ は電磁場の存在によって

$$\psi \to W\psi, \quad W = e^{-ie\int A_\mu dx^\mu} \tag{7}$$

と変更されるというのである．すると，ψ が満たす波動方程式 $P(\partial_\mu)\psi = 0$（$P(\partial_\mu)$ は ∂_μ の多項式）は，電磁場中では $P(\partial_\mu)(W\psi) = 0$ の形になり，$\partial_\mu(W\psi) = W(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ を用いると波動方程式が $P(D_\mu)\psi = 0$ となることがわかる．これは元の方程式で $\partial_\mu \to D_\mu$ の置き換えをしたことに当たるから，まさしくシュレーディンガーの処方箋に他ならない．さらに，$\Lambda(x)$ を勝手な関数としてこの波動方程式に左から $U \equiv e^{ie\Lambda}$ という位相因子を掛けてみると，簡単な計算から，

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda, \quad \psi' = U\psi \tag{8}$$

$$P(D'_\mu)\psi' = 0, \quad D'_\mu \equiv \partial_\mu - ieA'_\mu \tag{9}$$

を得る．これは A_μ のゲージ変換に加えて同時に波動関数も $\psi' = U\psi$ と変換すれば，ψ' は元の波動関数と同一の方程式を満たすことを示している．こうしてゲージ対称性の概念は，量子力学の舞台で新しい意味づけを獲得するのである．ゲージ変換 U は掛け算に関して $U(1)$（1次元ユニタリー群）と呼ばれる「ゲージ群」をなすので，これに対して不変な理論は $U(1)$ ゲージ理論と呼ばれる．

3.2 ゲージ原理と重力理論

このようにして正しく解釈し直されたゲージ対称性の持つより深い意味と役割を明確にしたのは，またしてもワイルであった．彼は1929年，それからの数十年にわたる基礎物理学の発展を先取りしたとさえいえる画期的な論文を発表した．そこには，ゲージ対称性の本質に深く関わる事柄に限っても，二つの特記すべき発見が含まれている．

一つは，アインシュタインの重力理論の新しい定式化である．ワイルは，後にワイル場と呼ばれるようになる2成分のスピノル場*5)の重力中での振る舞いを記述するために，計量の代わりに時空の各点で座標系を指定する「四脚場（vierbein）」と呼ばれる四つのベクトルの組 $e^a_\mu(x) = (e^0_\mu(x), e^1_\mu(x), e^2_\mu(x), e^3_\mu(x))$ を導入し，これらの時空上の変化によって時空の曲がり具合を記述するという全く新しい理論形式を構築した．この新形式では，各点各点でこの四つのベクトルを互いに変換する「局所ローレンツ変換」に対する不変性が理論の基本原理としておかれる．特に注目すべきは，四脚場から作られるスピン接続と呼ばれる場が電磁ポテンシャルと非常に似た性質を持つことである．これは，重力理論が「非可換ゲージ理論」と呼ばれる重要な理論の一例となっていることを示す特筆すべき発見であるのだが，この時点でのワイルはことの重要性に気づかなかった．

むしろワイルが強調したのは，ゲージ不変性の要求が電磁場理論そのものを導くといういわゆる「ゲージ原理」の認識であった．ワイルの議論を要約しよう：2成分スピノル場 ψ の理論は λ を定数として ψ にゲージ因子 $e^{ie\lambda}$ を掛ける変換に対して不変である．しかし各点 x で勝手な四脚場が定義される以上このゲージ因子もまた各点 x で異なる値をとる $e^{ie\lambda(x)}$ なるものに拡張されるべきである．このとき先の不変性を保つには，$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$ と変換するゲージ場 $A_\mu(x)$ を導入し，微分 ∂_μ を $\partial_\mu - ieA_\mu$ にしなければならない．これこそが電磁ポテンシャル A_μ の存在理由であり起源である．そして電磁場自体はゲージ

*4) $\hbar$ はプランク定数と呼ばれる量子力学の基本定数を 2π で割ったもの．以下簡単のため $\hbar = 1$, $c = 1$ とする単位系をとる．

*5) 電子の場は二つのワイル場で記述される．

不変な量 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ で記述され*6)，それは正しくマックスウェルの方程式を満たす．

ここで述べられている，変換のパラメーターを定数から任意の関数に拡張しそれに伴ってゲージ場を導入するという手続きは，「対称性のゲージ化」と呼ばれるが，ワイルはこの手続きを原理にまで高めたのである．この論文は，かの辛辣無比なパウリ（W. Pauli）にも賞賛され，有名な Handbuch der Physik 中のパウリの寄稿論文に詳しく取り上げられて，多くの物理学者の知るところとなった．

3.3 量子電気力学（QED）とゲージ対称性

さて，電磁場と電子の量子力学は，ディラック（P.A.M. Dirac）の相対論的電子論（1928年），さらにはハイゼンベルグとパウリによる論文（1929年）を出発点として「量子電気力学（Quantum Electrodynamics = QED）」という系統的かつ精密な量子場の理論へと発展していくのであるが，ゲージ対称性の重要性はここにおいて決定的なものとなってくる．その幾つかを簡単に紹介しよう．

QED においては，電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ の揺らぎのエネルギー量子は「光子」と呼ばれ，電磁気力は荷電粒子間の光子の交換によって生み出されるという描像が得られるが，ナイーブには $A_0(x)$ の揺らぎに対応する光子は負の存在確率を持ってしまい，量子力学の確率解釈を壊すかのように見える．しかし，ゲージ対称性のため，実は $A_\mu(x)$ の 4 成分のうち独立な物理的自由度は二つしかなく，それらは正しく正の存在確率を持つ光子の状態を表すことがわかるのである．これは電磁波が横波であることと密接に関係している．

また，QED を用いて電子や陽子の散乱振幅などを計算する際，その基礎となるのは異なる幾つかの時空点での場の揺らぎの相関を表す「相関関数」と呼ばれるものであるが，ゲージ対称性から導かれる電流の保存則からこれらの関数の間にウォード（J. Ward)–高橋の恒等式と呼ばれる一連の関係式が導かれ，散乱振幅にゲージ対称性が反映されていることが確かめられる．こうした計算は $e^2/4\pi \sim 1/137$ という小さな結合定数の巾展開で行われるが，この展開の次数を上げると無限に短距離の相互作用から無限大の寄与が現れる．この困難は，朝永，シュヴインガー（J. Schwinger），ファインマン（R.P. Feynman），ダイソン（F.J. Dyson）らによって構築された「繰り込み理論」によって克服されるのだが，ここでもまたウォード–高橋の恒等式が決定的な役割を果たしているのである．

こうしてゲージ対称性に支えられた QED は，水素原子のスペクトルの微小なずれの説明や電子の異常磁気能率の計算を皮切りに，様々な実験結果を驚くべき精度で説明する理論であることが明らかとなり，それ以後の量子場の理論の規範となったのである．

4. 非可換ゲージ理論と幾何学

4.1 ヤン・ミルズ場の理論

QED の目を見張る成功にも拘わらず，1929 年のワイルの論文に顔を覗かせていた重力理論を含むより一般的なゲージ理論という画期的な概念の方は，誰にも追求されることなく忘れ去られてしまっていた．そして 1954 年，ようやくこの新しいタイプのゲージ理論が，ヤン（C.N. Yang）とミルズ（R. Mills）によって，全く異なる動機の元に明解な形で（再）発見されることになる．

前述のパウリの寄稿論文を通して「ゲージ原理」に感銘を受けたヤンは，数年前からこのアイデアを「アイソスピン」間の相互作用に応用することを考えていた．アイソスピンとは，陽子や中性子さらにはパイ中間子などの「ハドロン」と呼ばれる強い相互作用をする粒子の性質や相互作用を特徴づけるために導入されたスピン角運動量に似たベクトル量で，この考えによれば，例えば陽子(p)と中性子(n)は，「核子」と呼ばれる粒子のアイソスピンベクトルがそれぞれ“上向き”及び“下向き”の状態にあるものと解釈される．そして実験によれば（電磁相互作用を無視する限り）系全体のアイソスピンは反応の前後で良い精度で保存する．

何度かの挫折の後，最終的にミルズと共に完成させた論文の要旨は次のようなものであった．核子の状態を記述するアイソスピンベクトルを $\vec{\psi} = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ とすれば，アイソスピンの保存は強い相互作用の理論がこのベクトルの“回転”（正確には行列式が 1 の 2×2 ユニタリー行列 U—これらは $SU(2)$ と呼ばれる群をなす—による $U\vec{\psi}$ の形の変換）対する不変性を持つべきことを示唆する．しかも局所場の理論と相容れるためには，“上向き”“下向き”を定義する軸の方向は各点各点で異なっていて良いであろう．すなわち，理論は $\vec{\psi}(x) \to U(x)\vec{\psi}(x)$ なる「$SU(2)$ ゲージ変換」に対して不変であるべきである．そしてこの不変性を

*6) $F_{\mu\nu}$ は電場と磁場を同時に表す相対論的な量である．

実現するには，電磁気理論の場合と同様に，微分 ∂_μ を新しいゲージ場 $A_\mu(x)$（2×2 の行列場）を含んだ $\partial_\mu - igA_\mu(x)$ というものに置き換える必要がある．

このようにして，ヤンとミルズは後にヤン・ミルズ場と呼ばれるようになる新しいゲージ場とその相互作用の理論を明快な形で提案したのであった．この場は幾つかの点で電磁場と異なる性質を持っている．まず，ゲージ変換が非可換な行列で行われるいわゆる「非可換ゲージ理論」になっていることである．またこれと密接に関係して，ヤン・ミルズ場はそれ自身アイソスピンを持ち，自己相互作用をする．このためヤン・ミルズ場の運動方程式は非線形となり，線形の方程式に従う電磁場に比してその量子力学的解析は格段と難しく，永い間その真の重要さを隠し続ける原因となるのである．

一方，ヤンとミルズが $SU(2)$ ゲージ理論を構築したのとほぼ同じ頃，内山はワイルが辿ったのと類似の道筋で，一般のリー群 G をゲージ群に持つ非可換ゲージ理論を構成し，特に G がローレンツ群の場合にはそれが一般相対論と等価であることを見いだしていた．幾つかの事情により*7)内山の論文の発表は1年以上遅れてしまうのであるが，ここにはヤン・ミルズ場と一般相対論に現れる接続の場が本質的に同一のものであることが初めて明らかにされている．これは現代的にいえば，（非可換）ゲージ理論が数学的にはファイバー束の幾何学に他ならないという認識の萌芽であり，後に特性類の理論などと結びついて物理的にも数々の重要な現象と関係するのであるが紙面の都合上割愛する*8)．

5. ヤン・ミルズ型ゲージ理論による諸力の統一

5.1 ゲージ対称性の自発的破れと電弱統一理論

ヤン・ミルズ理論が直ちに注目を浴びなかった原因の一つにゲージ場の質量の問題がある．後年のヤンの述懐によれば，彼がプリンストン高等研究所で初めてこの新しいゲージ理論についてのセミナーを行ったとき，パウリからゲージ場の質量を問われ，立ち往生した末にそれは難問であると答えたところ，パウリは十分な言い訳になっていないと批判したそうである．自己相互作用を無視すれば，質量はゼロであると答えるのが自然だが，そのような場は当時（そして現在も）観測されておらず，また相互作用がどう影響するかがわからなかったため，ヤンは正直に答えたものであろう．しかし振り返れば，彼が「難問題である」といったのは，二つの意味でまさに正鵠を得たものであった．現在ヤン・ミルズ場は，一方では電磁気相互作用と弱い相互作用*9)を統一的に記述する「電弱統一理論」として，また一方では，次節で述べるように，ハドロンの振る舞いを，その構成要素であるクォークやグルーオンの間の相互作用から記述する「量子色力学」として現代物理学の要となっているのだが，そのいずれの場合にも単純に質量がゼロの場としては実現されていないのである．

この節ではまず前者について述べよう．弱い力の特徴の一つは，その到達距離が $\sim 10^{-16}$ cm と非常に短いことであるが，この力を交換力と見なそうとすると，交換される粒子は陽子の100倍程の質量を持ち，しかも同時にゲージ場と酷似した性質を持つべきことがわかる．しかし，常識的にはそのような「質量を持ったゲージ場」は存在しない．例えば電磁場に質量を与えるには $m^2A_\mu A^\mu$（m は質量）という質量項を付加しなければならないが，この項はゲージ対称性をあからさまに破ってしまうのである．

この大きな困難を解決したのはヒッグズ（P. Higgs）によって発見された「ゲージ対称性の自発的破れ」のメカニズムであった．対称性の自発的破れの最も簡明な例としては，鉄などの強磁性体を構成している小さな磁石（以下スピンと呼ぶ）が絶対零度で完全に同一方向に揃う現象（スピンの凝縮）が挙げられる．ある特定の方向が選ばれてしまったこの状態は，明らかに回転対称性を破っているように見えるが，実は物理法則自体の対称性はこの場合でも破れてはいない．すなわち，どの方向に揃う場合も系のエネルギーは同じであり，その「可能な基底状態の集合」に対しては回転対称性は存在している．現実にはそのうちの一つしか実現しないため，あたかも対称性が破れたように見えるのである．

ヒッグズの発見は，ゲージ場とスピンの役割をする「ヒッグズ場」が相互作用する系では，ヒッグズ場の凝

*7) これについては内山の歯ぎしりが聞こえてくるような回想録（「物理学はどこまで進んだか」，第10章「痛恨記」，（岩波現代選書））を見よ．ヤン自身もこの経緯には並々ならぬ関心を持っており，この本が出版されるや，私に第10章の英訳を依頼してきたほどである．

*8) すこし古いが，一般向けの解説として，拙稿「素粒子論とトポロジー(1), (2)」（「自然」1983年11月及び12月号，中央公論社）をあげておく．

*9) 原子核の崩壊をはじめとする数々の現象を引き起こす非常に弱い力．

縮に伴ってゲージ場に質量が生ずるという現象であった．電磁場を例にとり，ヒッグズ場として複素数値のスカラー場 ϕ を考えよう．この場の運動を表す項は $(\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi)$（$*$ は複素共役を表す）と書けるが，電磁場が存在する場合 ∂_μ は $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ に置き換わるのであったから，この項は次のような形になる：

$$(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - ieA_\mu\phi^*\partial^\mu\phi + ieA^\mu\partial_\mu\phi^*\phi + e^2|\phi|^2 A_\mu A^\mu \tag{10}$$

ここで $\phi(x)$ に凝縮が起こったとしよう．すると $\phi(x)$ は位置 x によらない平均値 v を獲得し，(10) の末尾の項から $e^2|v^2|A_\mu A^\mu$ という形の項が生ずるが，これは $e|v|$ を質量 m と解すればまさしくゲージ場の質量項に他ならない．

このようにしてゲージ対称性を本質的に破ることなくゲージ場に質量を付与する「ヒッグズ機構」は，のちにワインバーグ (S. Weinberg) 及びサラム (A. Salam) によって電磁気力と弱い力を統一する枠組みに応用され，画期的な成功を納めるに至った．彼らはゲージ群として $SU(2)\times U(1)$ を考え，これにヒッグズ機構を適用することにより，弱い相互作用を媒介する 3 個の重いゲージ場 W_μ^+, W_μ^-, Z_μ（$\pm$ は電荷を表す）と質量を持たない通常の電磁場 A_μ が統一的に得られ，しかもそれらが電子やクォークの場と正しく結合することを示したのである．この理論の実験的証拠は 1970 年代前半から続々と得られ始めたが，1983 年 $W^\pm$ 及び Z 粒子が加速器によって生成されるに及んで揺るぎないものとなった．

5.2 量子色力学とカラーの閉じこめ

一方，ヤン・ミルズ場発案の動機であった強い相互作用への適用にもまた困難な歴史が待ち受けていた．電磁場以外には質量がゼロのゲージ場が観測されないという事実に加えて，ヤン・ミルズ場の本質的な強い非線形性のために信頼できる解析手段が見つからず，この理論の量子力学的性質の研究は手詰まりの状態となっていた．しかしこの間，加速器の飛躍的発展に伴って強い相互作用をする新粒子が続々と発見されるようになり，1964 年にはこれを説明するために，ゲルマン (M. Gell-Mann) 及びツヴァイク (G. Zweig) により，ハドロンを u, d, 及び s と呼ばれる 3 種類のクォークの複合体と見なす「クォークモデル」が提唱されるに至った．さらに，ハン (M.Y. Han) と南部は，3 個の s クォークからなる Ω^- 粒子に関する謎や中性パイ中間子の崩壊確率に関する実験と理論の 3 倍のずれを説明するために，各クォークは 3 種類の「色 = カラー」を持つとする色つきクォーク*10) 仮説を発表し，ハドロンはすべての色が均等に混じり合った（あるいはうち消し合った）「無色」の状態であるとした．

この仮説では，色つきクォーク間の相互作用の問題は扱われなかったが，ようやく 1970 年代に入ると，それらが色電荷と結合する $SU(3)$ ヤン・ミルズゲージ場（通称グルーオン場）によって引き起こされるという「量子色力学」(Quantum Chromo-Dynamics=QCD) 理論が提案されるに至った．そして，まもなくこの理論の結合定数がエネルギーが上がるにつれて減少する*11) という画期的な性質（「漸近自由性」）を備えており，従って高エネルギーでの散乱振幅の重要な部分が（小さな）結合定数に関する摂動論で計算できるということが明らかにされるや，QCD はたちまちにして強い相互作用の基本理論として注目され，数々の実験事実を説明することが検証された．しかもこの「漸近自由性」は裏を返せば低エネルギーでは結合定数が増大することを示唆するから，その強い力によりカラー電荷を持ったクォークやグルーオンはハドロン内に閉じこめられ，これらが観測にかからない事実をうまく説明すると考えられるのである．この「カラーの閉じこめ」は恐らく次のようなメカニズムで起こると考えられている．タイプ II 超伝導体では磁束の拡がりを抑制するマイスナー効果と呼ばれる現象が見られるが，QCD の基底状態はこれに類似しており，クォークから出たカラー電束は細く絞られて一定の張力を持った「ひも」となり，これに縛られて閉じこめが起こるというのである．

こうして QCD の成功はヤン・ミルズゲージ理論が電弱統一理論とはまた別の様相のもとに，自然界の基本法則を記述するものであることを明らかにしたのである．

5.3 大統一理論の考え

電磁気力と弱い力が $SU(2)\times U(1)$ ゲージ理論で記述され，一方強い力もまた $SU(3)$ ゲージ理論で記述されるということになると，当然これらのゲージ群を含むより大きなゲージ群 G を持ったゲージ理論によるさらなる統一ができるのではないかと予想される．1974 年ジョージャイ (H. Georgi) とグラショウ (S. Glashow) はこうした考えをもとに G として $SU(5)$

---

*10) 無論「色」というのは比喩であって，3 種類の異なる量子数を意味する．

*11) 実は観測にかかる「結合定数」は定数ではなく，反応のエネルギーによる．

群をとった「大統一理論＝GUT (Grand Unified Theories)」の模型を提唱した．この模型は2段階のヒッグズ機構を用いて電磁場とグルーオン場以外のゲージ場に質量を与える仕組みになっており，しかも $SU(3)$, $SU(2)$, $U(1)$ によるゲージ相互作用の強さを表す結合定数 g_3, g_2, g_1 が $\sim 10^{15}$ GeV という超高エネルギー*12) においてほぼ一致するという大統一理論に不可欠な性質を備えているものであった．その後，ゲージ群 G をさらに大きなものへと拡張する数々の試みが盛んに行われたが，現在では次章で述べる「超対称性」を組み込んだ $SU(5)$ 超対称 GUT*13) が最も有力な候補として研究されている．

6. 重力を含む統一理論とゲージ対称性

6.1 超重力理論：超対称性のゲージ化

前章で述べた大統一理論における統一のエネルギースケールは，素粒子に対しても重力の効果が無視できなくなる「プランクエネルギー」(10^{19} GeV) にかなり近い．従って，当然重力を含めた自然界のすべての力及び物質を統一する "究極の統一理論" を志向することが自然となってくる．その最大の障害の一つとなるのは，自然界のすべての粒子（場）が整数スピンを持つ「ボゾン」と $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots$ のような半奇数スピンを持つ「フェルミオン」に分類され，それらが量子力学的に非常に異なる性質を持つという事実である．非可換ゲージ対称性を含む "通常の" 対称性のみではボゾンとフェルミオンを結びつけることはできないのである．

しかしこの状況は，1974年ヴェス (J. Wess) とズミノ (B. Zumino) によりボゾンとフェルミオンを互いに変換する「超対称性」を備えた場の理論が構築されることによって一変する．ワイルや内山の考えによれば重力理論はローレンツ変換のゲージ化によって得られるのであったから，これを超対称性を組み込んだものに拡張し，さらに大統一理論に現れる通常のゲージ対称性も超対称化すれば，すべての場を統一した超重力統一理論が得られると考えられるのである．実際この考えに基づいて1976年に最も簡単な超重力理論が初めて構築され，その後より高いゲージ対称性を持つ拡張された超重力理論が幾つか現れるに至った．超対称性を備えた場の理論の大きな魅力の一つは，場の理論に現れる無限大の困難が，ボゾンとフェルミオンの寄与の間で相殺する傾向を持つことである．このため一時は完全に有限な超重力統一理論を作り得るのではないかという期待さえ持たれるに至ったが，その後の研究による結論は，最も対称性の高い超重力理論においても無限大を完全に取り除くことはできないというものであった．

6.2 超弦理論とゲージ対称性

超重力理論の不完全性が明らかになり始めた頃から，それに代わって急速に発展してきたのが，完全に有限な理論であると考えられている「超弦理論*14)」（超対称性を備えた弦理論）である．この理論はこれまで述べてきた場の理論とは根本的に異なる構造を持つが，ここでもまたゲージ対称性は理論構成の根幹をなしている．以下では，ゲージ対称性がそこでどのような形で現れ，いかに重要な役割を果たしているかに焦点を絞って述べることにしよう．

カラーの閉じこめの項で触れたように，弦理論はもともと強い力の有効理論として誕生したものであるが，70年代の中庸以後自然界の統一理論として根本的に再解釈されるようになった．弦は大別すると，両端にある種の電荷がついた「開弦」と，端がなく輪のように閉じた「閉弦」の2種類に分けられる．そして，これらの物体の力学は次の意味で自然界の物質とその相互作用を見事に統一する．

まず，弦の回転や振動といった可算無限個の異なる状態（モードという）は，マクロな視点からは様々な粒子を表すものと解釈できるが，これは自然界の全ての粒子（及びそれに付随する場）を同じ実体の異なる状態として統一的に理解する枠組みを与える*15)．さらに，弦理論はこれらの「粒子」の間の様々な相互作用を，図1のような弦の「結合」と「分裂」というたった2種類の基本的なプロセスとして理解することを可能にする．例えばヤン・ミルズゲージ場は開弦の，また重力場は閉弦の，それぞれ最も軽い（短い）モードとして，その相互作用も含めて自然に実現される．しかも，超弦理論においては弦の本質的な拡がりと超対

*12) GeV= エネルギーの単位で10億電子ボルトの略．陽子の質量を相対論 ($E = mc^2$) に従ってエネルギーに換算するとほぼ1 GeV となる．

*13) この理論では（未知の粒子の影響を無視する仮定のもとで）g_i が $\sim 10^{16}$ GeV 程度のエネルギーで非常に高い精度で一致する．

*14) 超弦理論及びその最近の発展についての一般向け解説として，拙稿「超弦理論の新時代」（「科学」68巻399ページ (1998)，岩波書店）をあげておこう．

*15) 無論無限個の粒子のほとんどはプランク質量 ($\sim 10^{19}$ GeV$/c^2$) 以上の質量を持つため直接には観測されない．

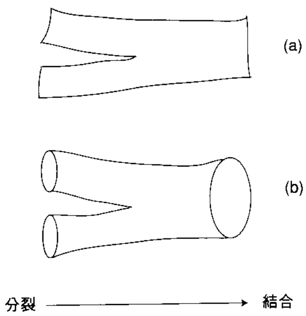

図1　開弦 (a) や閉弦 (b) の結合と分裂の基本プロセス．

称性のため，無限大の困難が回避される．すなわち，閉弦を含む超弦理論は，重力までも統一した有限な量子力学理論という画期的な性質を持つ現在のところ唯一の理論なのである*16)．

こうした弦理論の整合性を支えているのは，無限個の場の間に働く無限に大きなゲージ対称性の存在である．量子電気力学（QED）の項で，ゲージ対称性が負の確率を持つ状態を除去することを述べたが，弦理論に現れる無限個の場の中には電磁場を拡張したような無限個の場が存在し，巨大なゲージ対称性のおかげでそれらの中の確率解釈を危うくする成分が巧妙に取り除かれる仕組みになっている．ゲージ対称性は相対論的な弦理論の存在にとってまさに命綱なのである．

このようなゲージ理論の無限集合体とでもいうべき超弦理論の研究は，1995 年頃を境に質的に新しい段階に入ったのだが，そこでゲージ対称性を実現する新しいシステムとして注目されている「D-brane」と呼ばれる物体の多体系について触れておこう．一言でいえば，D-brane とは開弦の端点がつきうる面状の配位であり，そのあるものはブラックホールの性質を持つという注目すべき物体である．図 2 は N 枚の D-brane が開弦を介して相互作用している様子を模式的に描いたものである．

特にこれらの D-brane がほとんど重なった状況では開弦の最も短いモード，すなわちヤン・ミルズ場，が系の力学を支配することになり，どの面とどの面を繋ぐモードであるか（自分自身を繋ぐものも含む）を区別すると N^2 個の異なるゲージ場が現れることになる．これはこの面上に $U(N)$ ゲージ理論が実現されることを意味する．しかも，一つの面が他の面から離れる状況を考えるとその面に端を持つ弦の張力のエネルギーが増し，対応するゲージ場に質量が現れる．これはま

*16)　実は前節で述べた超重力理論は超弦理論の低エネルギーでの振る舞いを記述する有効理論であることがわかっている．

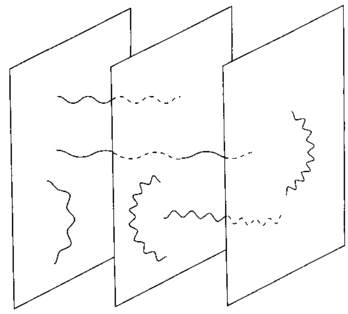

図2　N 枚の D-brane 間の相互作用．

さしく「ヒッグズ機構」を非常に簡明な幾何学的な形で表したものに他ならない！ さらに，D-brane はその上の開弦がちぎれることにより閉弦を放出する能力を持ち，その周りに重力場を生み出す．そして最近その重力場の力学と D-brane 上のゲージ理論の間に非常に緊密な関係があることがわかってきた．これを利用すると，重力理論を用いて強く結合したヤン・ミルズ場の量子力学的振る舞いを調べる，という思いもよらなかったことができるようになるのである．

その他，知られているすべての種類の超弦理論を統一する「M 理論」と呼ばれる野心的な枠組みにおいてもゲージ対称性は大きな役割を果たすのであるが，紙面の都合上割愛する．

7. エピローグ

マックスウェルの電磁気学の中に潜んでいながら永い間気づかれなかった「ゲージ対称性」という一見無駄な対称性が，卓抜な着想の積み重ねの末に，自然界の全ての力を支配する原理として認識されていく様は，自然の奥深さを示すと共に，それを明らかにしてきた人間の叡智の偉大さを感じさせる．しかし前章でスケッチした超弦理論の汲めども尽きせぬ深い構造は，ゲージ対称性の歴史にはまだまだ予期せぬ驚愕のドラマが待ち受けていることを予感させる．それは，既存のゲージ対称性の新たな役割の発見や適用範囲の拡大というレベルにとどまらず，時間や空間の概念の全く新しい捉え方と絡んで，予想だにせぬ形に進化していく可能性さえあるのではないかと思われる．そしてその種はすでにどこかに眠っていて，発見されるのを待っているのかもしれない．願わくばこの新たな世紀に，それが日本人の手によって発見されることを祈ってエピローグとしよう．

（かざま・よういち，東京大学大学院総合文化研究科）