2.9 導体系の電位と電気容量

導体は「**等電位体**」として特徴づけられたが、導体系の電位とその上に帯電する電荷の間には電磁気学の重ね合わせの原理から簡単な関係が成り立つ。

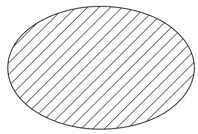
一個の導体の場合

導体の電位 ϕ とその上の電荷 Q の間の一般的な関係 を導こう。
まず、電位 ϕ がどのように定まるかを復習する。電位 ϕ
が導体外部で満たす性質は

(i) 外部の空間で $\nabla^2\phi = 0$

(ii) 無限遠での境界条件（約束） $\phi = 0$

(iii) 導体表面での境界条件 $\phi = \phi_c = const$



こうして定まった 電位 ϕ から表面での電場 E_n を求め、さらにそれを用いて表面上の全電荷 Q が次のように求まる：

$$E_n = \hat{n}\cdot(-\vec{\nabla}\phi) \tag{2.128}$$

$$Q = \epsilon_0 \int dSE_n \tag{2.129}$$

重要なのはこれらの式がいずれも**線形**であることである。（これは以前述べたように電場や電位の重ね合わせの原理からの帰結である。）すなわち、上記の方程式を満たす解を ϕ とすると、それを λ 倍したものも やはり Lapalace 方程式を満たす。
但し、表面での境界条件は λ 倍される。すると明らかに導体上の電荷も λ 倍される。すなわち

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \lambda\phi \\ Q &\longrightarrow \lambda Q \end{aligned}$$

このことは、導体の電位 ϕ_c と Q が比例することを意味する。

$$\boxed{Q = C\phi_c \qquad (2.130)}$$

比例係数 C を**導体の電気容量 (electric capacity)** と言う。

C の単位:$[C] = \mathrm{Coulomb/Volt} = F$ (Farad). ここで $\mathrm{Volt} = [\mathrm{Energy}/Q] = \mathrm{Joule/Coulomb}$. Farad と言う単位は、Coulomb と同じく大きすぎるので、次のものがよく使われる：

$$
\begin{aligned}
\mu F &= 10^{-6} F \quad \text{micro Farad} \\
pF &= 10^{-12} F \quad \text{pico Farad}
\end{aligned}
$$

□ **C の決まり方**：

電気容量 C は、**導体の大きさと形状によって決まる**。実際に C を求めるには、導体上に Q なる電荷を与えたときの ϕ_c を計算し、Q と ϕ_c の関係を求めるのが最も簡単。

□ **例:**：

半径 $a = 1m$ の球形の導体の電気容量。全電荷を Q とすれば、電位及び容量は、

$$
\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a} \\
\therefore \quad C &= 4\pi\epsilon_0 a = \frac{10^7}{c^2} = 1.1 \times 10^{-10} F = 110\ pF
\end{aligned}
\tag{2.131}
$$

この例のように、実際電気容量は pF 程度になることが多い。

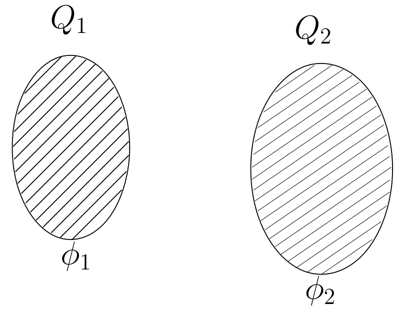
二個の導体 = コンデンサー

複数の導体からなる系に対しても電気容量の概念を拡張することができる。

簡単のため、二個の導体の場合を考えよう。導体１，２にそれぞれ電荷 Q_1、Q_2 を与えたとき導体外部にできる電位 $\phi(\vec{x})$ は、**重ね合わせの原理より**、Q_1 のつくる電位 $\phi^{(1)}(\vec{x})$ と Q_2 のつくる電位 $\phi^{(2)}(\vec{x})$ の和になる：

$$
\phi(\vec{x}) = \phi^{(1)}(\vec{x}) + \phi^{(2)}(\vec{x})
$$

$\phi^{(1)}$ を考える場合には $Q_2 = 0$ としてよいから、導体表面の電位は 唯一存在する Q_1 に比例する他はない。 $\phi^{(2)}$ に対しても同様。従って図のよう状況になる：



式で書くと、 $Q_2 = 0$ の時は、

$$\phi_1 = D_{11}Q_1\,, \qquad \phi_2 = D_{21}Q_1$$

のように Q_1 に比例する。同様に Q_1 がゼロの場合には

$$\phi_1 = D_{12}Q_2\,, \qquad \phi_2 = D_{22}Q_2$$

これらを重ね合わせると

$$\begin{aligned} \phi_1 &= D_{11}Q_1 + D_{12}Q_2 \\ \phi_2 &= D_{21}Q_1 + D_{22}Q_2 \end{aligned} \tag{2.132}$$

従って、

$$\boxed{\phi_i = \sum_j D_{ij}Q_j \qquad (2.133)}$$

D_{ij} を**電位係数**と呼ぶ。これを逆に解くと

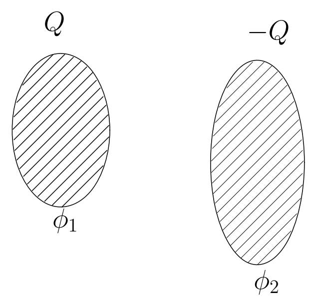
$$\boxed{Q_i = \sum_j C_{ij}\phi_j \qquad (2.134)}$$

C_{ij} は**容量係数**と呼ばれる。いったん D_{ij} または C_{ij} が求まると、ϕ_i がわかれば Q_i がわかる（あるいはその逆) という具合になる。

- C と D は行列として逆行列である。すなわち $C = D^{-1}$。

コンデンサーとその容量

特に、$Q_1 = Q = -Q_2$ としたとき、この導体系を **Condenser** と呼ぶ。このとき、ϕ_1, ϕ_2 はいずれも Q に比例するから、電位差 $V = \phi_1 - \phi_2$ もまた Q に比例する。ゆえ



$$\boxed{Q = CV \qquad (2.135)}$$

というよく知られた関係式を得る。**電位差、従ってコンデンサーの容量は、無限遠での電位のとり方の約束によらない**ことに注意する。

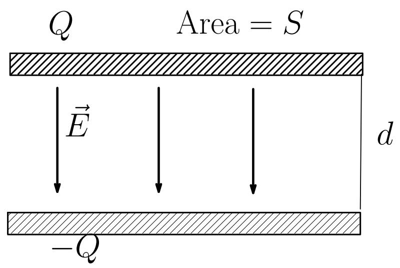
演習 2.13　このときの C を電位係数 D_{ij} で表せ。

解

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= D_{11}Q_1 + D_{12}Q_2 = (D_{11} - D_{12})Q \\
\phi_2 &= (D_{21} - D_{22})Q \\
\therefore \quad V &= \phi_1 - \phi_2 = (D_{11} - D_{12} - D_{21} + D_{22})Q \\
\therefore \quad C &= (D_{11} - D_{12} - D_{21} + D_{22})^{-1}
\end{aligned}$$

コンデンサーの例

例１：　平行板コンデンサー



図より

$$\begin{aligned} \sigma &= Q/S = \text{表面電荷密度} = \text{有限} \\ E &= \sigma/\epsilon_0 \\ V &= Ed = \sigma d/\epsilon_0 = \frac{d}{\epsilon_0 S}Q \end{aligned}$$

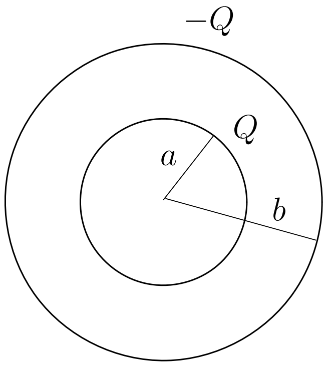
これより

$$\boxed{C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \sim \epsilon_0 \frac{\text{面積}}{\text{長さ}} \qquad (2.136)}$$

間隔が狭いほど電位差は小さく、従って容量は大きい。但しあまり狭くすると放電が起こる！

- コンデンサーが回路の中でどのように使われ、どのような役割を果たすかは、電流とそれが作る磁場の話をした後で説明する。

例 2：　同心球面コンデンサー



中間領域での電場、及び電位差は

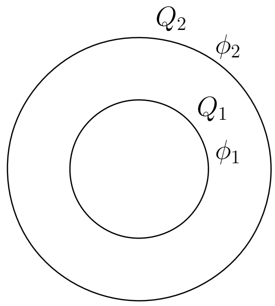
$$
\begin{aligned}
E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \\
V &= \int_b^a (-E(r))dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab} \\
\therefore \quad C &= \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} \qquad (2.137)
\end{aligned}
$$

やはり、面積を長さで割ったものになっている。

演習 2.14 上記の同心球面コンデンサーについて容量係数を計算し、次の性質を確かめ

$$
\begin{aligned}
C_{ij} &= C_{ji} \qquad i \neq j \\
C_{ii} &\geq 0 \\
C_{ij} &\leq 0
\end{aligned}
$$

解 今度は、各導体に異なる電荷を与えたときの ϕ_i を個々に求めなければならない。まず電場を求め、それから電位を求めるのが簡単。内側の球面に Q_1、外側の球よ。面に Q_2 を与える。中間領域では Gauss の定理より



$$
E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}
$$

ゆえ、電位差は

$$
\begin{aligned}
\phi_1 - \phi_2 &= -\int_a^b \frac{d\phi}{dr} \\
&= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)
\end{aligned}
$$

外側の空間での電位は

$$
\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2}{r} \\
\therefore \qquad \phi_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2}{b}
\end{aligned}
$$

従ってこれらの関係式から電位係数 D_{ij} を読みとれば、行列として

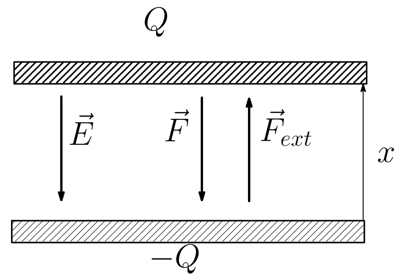
$$
D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{b}\begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

この逆行列が C_{ij} ゆえ

$$
C = 4\pi\epsilon_0\frac{ab}{b-a}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{b}{a} \end{pmatrix}
$$

2.10　導体系にはたらく力

平行板コンデンサーにはたらく力



図のような平行板コンデンサーにはたらく力を求めよう。まともに Coulomb 力を計算しても求まるが、次に述べる**仮想仕事の原理**を用いると簡単である。
図のような状態に保っておくには、求める力 $\vec{F}$ に逆らって外力 $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}$ を加えなければならない。ゆっくりと δx だけ二つの面を離すと、このときした外力のする仕事は $F_{ext}\delta x$ であり、その分コンデンサーのポテンシャルエネルギーは増加するから

$$\begin{aligned} F_{ext}\delta x &= -F\delta x = \delta U \\ \therefore \quad F &= -\frac{\delta U}{\delta x} \end{aligned} \tag{2.138}$$

上記の系に対してこれを計算しよう。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\sum_i Q_i\phi_i = \frac{1}{2}Q(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2}QV \\ V &= Ex = \frac{\sigma}{\epsilon_0}x \\ \therefore \quad U &= \frac{1}{2}QEx \\ \therefore \quad \delta U &= \frac{1}{2}QE\delta x \\ \therefore \quad F &= -\frac{1}{2}QE = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \end{aligned} \tag{2.139}$$

F の符号が負であるということは x のへる方向、すなわち板を近づける方向に力が働くことを意味する。

次元解析

$$[F] = [Q][E] = [Q]\frac{Q}{\epsilon_0 L^2} = \frac{Q^2}{\epsilon_0 L^2} \tag{2.140}$$

従って正しい次元が得られている。