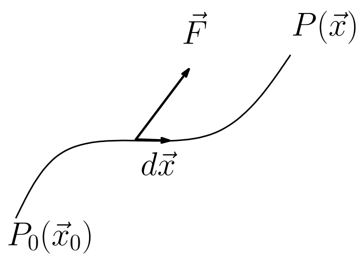
2.5　ポテンシャルエネルギーと電位

2.5.1　仕事とポテンシャルエネルギーの復習

□ **仕事と保存力**：

$$W = \int_{P_0}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_{s_0}^{s} \vec{F}(\vec{x}(s))\cdot\frac{d\vec{x}}{ds}ds \quad (2.51)$$



こうして定義された**仕事が経路によらない**とき、$\vec{F}$ は「**保存力**」と呼ばれる。「保存力」と呼ぶわけは、そのような力が働くとき、系の全エネルギーが保存するからである。

このとき、始点 $P_0(\vec{x}_0)$ を固定して考えると、W は終点 $P(\vec{x})$ の一価関数となる。これを $-U(\vec{x})$ と書き、$U(\vec{x})$ を P_0 から測ったポテンシャルエネルギーと呼ぶ。従って、**保存力 $\vec{F}$ に逆らって** $\vec{x}_0$ から $\vec{x}$ まで物体を動かすために必要な仕事は

$$\boxed{U(\vec{x}) - U(\vec{x}_0) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} (-\vec{F})\cdot d\vec{x} \quad (2.52)}$$

この分のエネルギーが**ポテンシャルエネルギー**として蓄えられる。

$\vec{F}$ の U による表式

$\vec{F}$ を U で解くことを考えよう。そのために、まず両辺の時間微分をとる。すると左辺は

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \vec{\nabla}U\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} \end{aligned} \quad (2.53)$$

一方右辺は

$$\frac{d}{dt}\int^{t}(-\vec{F}(\vec{x}(t)))\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}dt = -\vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} \quad (2.54)$$

積分の経路は任意であるので、途中の $d\vec{x}/dt$ も任意の関数。そのとき両辺が一致するためには、$d\vec{x}/dt$ をとった量が一致する必要がある。すなわち

$$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) \;=\; -\vec{\nabla}U(\vec{x}) \quad (2.55)}$$

$\vec{F}$ が保存力であることを言うには、それがこのように書けることを示すのが一番早い。

エネルギー保存の復習

上記の様に力がポテンシャルエネルギーの微分でかけるときには、粒子に対する全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} + U(\vec{x}) \tag{2.56}$$

となる。この量は、運動方程式を満たす運動に対して保存する。これを見るには

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= m\vec{v}\cdot\vec{a} + \frac{dU(\vec{x})}{dt} \\ &= m\vec{v}\cdot\vec{a} + \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{\nabla}U = m\vec{v}\cdot\vec{a} - \vec{v}\cdot(-\nabla U) \\ &= \vec{v}\cdot(m\vec{a} - \vec{F}) = 0 \qquad \leftarrow \text{運動方程式}\end{aligned} \tag{2.57}$$

ゆえ、E は時間に依らず一定である。

2.5.2 クーロン力によるポテンシャルエネルギーと電位

$\vec{x'}$ にある電荷 q が位置 $\vec{x}$ につくる電場は、

$$\vec{E}(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3}(\vec{x}-\vec{x'}) \tag{2.58}$$

で与えられるが、これは $\vec{x}$ にある**単位電荷に働く力**とも解釈できる。この力が保存力であることは、次の公式から容易に確かめられる：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\sqrt{\sum_i (x_i - x_i')^2}} = -\frac{x_i - x_i'}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3} \tag{2.59}$$

すなわち

$$\boxed{\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|} \;=\; -\frac{\vec{x}-\vec{x'}}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3} \qquad (2.60)}$$

式 (2.60) は後で重要になる。
$\vec{E}$ の表式と比べれば直ちに

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) && (2.61) \\ \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{x}-\vec{x'}|} + \mathrm{const} && (2.62) \end{aligned}}$$

$\phi(\vec{x})$ は**「静電ポテンシャル」** (electrostatic potential)、あるいは**「電位」**と呼ばれ、これに電荷を掛けたものはエネルギーの次元を持つ。定数は $\underline{\phi(\vec{x}=\infty)=0\ \text{と定義}}$ するとゼロにとれるから、結局

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{x}-\vec{x'}|} \\ &= \int_{\infty}^{\vec{x}} \left(-\vec{E}(\vec{x'})\right)\cdot d\vec{x'} && (2.63) \end{aligned}}$$

これは**単位電荷を** ∞ から $\vec{E}$ に逆らって $\vec{x}$ まで持ってくるのに要する仕事を表している。

電位は次の重要な性質を持つ：

1. 電場の重ね合わせより、電位の重ね合わせができることがわかる。
2. 電場はベクトル場であるのに対して、電位はスカラー関数 (1 成分関数) なので、遙かに取り扱い易い。従って、まず電位を求め、しかる後 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ により電場を求めるのが良い。

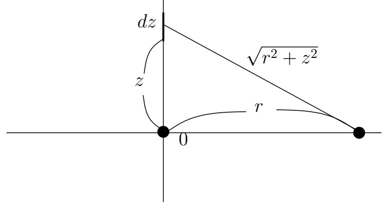
□ **一般の電荷分布による電位**：

電位に対する重ね合わせは (ベクトルではなく) 単なる関数の足し算であるから、

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|} \tag{2.64}$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x'})d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x'}|} \quad \text{(連続分布の場合)} \tag{2.65}$$

演習 2.7 (1) 無限に長い直線 (z 軸) 上に線密度 τ で一様に分布した電荷がその周りに作る電位を求めよ。
但し、(∞ 遠ではなく) 直線から垂直距離 a の点での電位を 0 と定める。
注意：いったん直線の長さを有限（例えば $2l$) にとって計算し、しかるのち $l \to \infty$ の極限を考えること。



(2) 得られた電位から電場を求め、以前求めたものと一致することを示せ。

解　(1)　対称性から、電位は z 軸まわりに対称であり、また z に依らないから、z 軸からの距離 r のみの関数となるはずである。$r=a$ で電位がゼロになる条件を考慮に入れると、$z\sim z+dz$ 間の電荷が作る電位は

$$\frac{\tau dz}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) \tag{2.66}$$

となるから、これを $-l$ から l まで積分すればよい。第一項については変数変換 $z=ru$ で z から u の積分に変えると

$$\int_{-l}^{l}\frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}}=\int_{-l/r}^{l/r}\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=2\int_0^{l/r}\frac{du}{\sqrt{u^2+1}} \tag{2.67}$$

第二項は $r\to a$ として得られるから、引き算すると $2\int_{l/a}^{l/r}du/\sqrt{u^2+1}$ となる。$l\to\infty$ の極限では $u>>1$ であるから、これは次の簡単な積分に帰着する：

$$\lim_{l\to\infty}2\int_{l/a}^{l/r}\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\lim_{l\to\infty}2\int_{l/a}^{l/r}\frac{du}{u}=2\ln\frac{a}{r} \tag{2.68}$$

従って求める電位は

$$\phi(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{a}{r} \tag{2.69}$$

(2)　電場は明らかに r 方向成分 E_r しかない。電位と電場の関係から

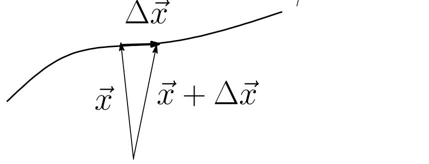
$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)=\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{2.70}$$

これは以前求めた答えと一致する。

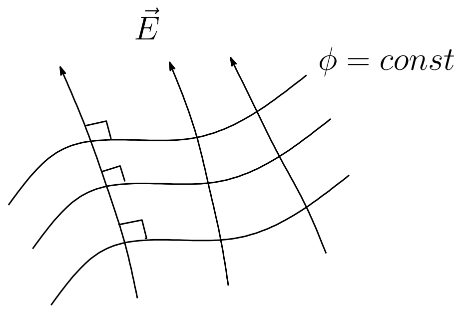
□ **等電位面と電場の方向**：

等電位面 (equipotential surface) がわかると、電場がどのようにできるかを幾何学的に直ちに知ることができる。

$$\begin{aligned}
\text{等電位面} &\iff \phi(\vec{x})=C=\text{const}\\
\therefore\quad 0 &= \phi(\vec{x}+\Delta\vec{x})-\phi(\vec{x})\\
&= \Delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{x})\\
\Rightarrow &\quad \Delta\vec{x}\cdot\vec{E}(\vec{x})=0
\end{aligned} \tag{2.71}$$



従って、**電場は等電位面に直交する**。



2.5.3 電位の満たす方程式：ポアソン方程式

既に述べたように、電場を求めるにはまず電位を求めてこれを微分すればよい。これまでに得られた二つの方程式

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.72}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \tag{2.73}$$

を組み合わせると、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi \\ &= -\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned} \tag{2.74}$$

すなわち

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.75}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \text{Laplacian} \tag{2.76}$$

を得る。これを **Poisson 方程式** と言う。特に、$\rho = 0$ の場合は **Laplace 方程式**と呼ばれる。

2.5.4 Poisson 方程式の一般解

Poisson 方程式の一般解を得ることは、Coulomb 力による電位の形を参考にすればそう難しくない。Poisson 方程式を満たす一つの解（特解という）$\phi_0(x)$ が見つかったとしよ

う。一般解を $\phi(x)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla^2\phi_0 &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\therefore \quad \nabla^2(\phi-\phi_0) &= 0 \\
\therefore \quad \phi(\vec{x}) &= \phi_0(\vec{x}) + f(\vec{x}) && (2.77) \\
f(x) &= \text{Laplace 方程式の一般解} && (2.78)
\end{aligned}
$$

となる。Laplace 方程式の解は、境界条件が与えられれば、簡単な場合には後に述べる方法で解くことができる。

Coulomb 力による電位は Poisson 方程式の解の一つであるはずであるから、次の定理を得る：

> Poisson 方程式の一般解 $\phi(x)$
>
> $$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x' \frac{\rho(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|} + f(\vec{x}) \qquad (2.79)$$
>
> $$\nabla^2 f(\vec{x}) = 0 \qquad (2.80)$$

□ **チェック**：

∇^2 を働かせてみよう。ナイーブに計算すると

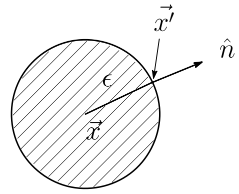
$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|} &= -\frac{\vec{x}-\vec{x'}}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3} && (2.81) \\
\therefore \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|} &= \frac{-\vec{\nabla}\cdot(\vec{x}-\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3} - (\vec{x}-\vec{x'})\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3} \\
&= -\frac{3}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3} - (\vec{x}-\vec{x'})\cdot\frac{(-3)(\vec{x}-\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|^5} \\
&= 0 && (2.82)
\end{aligned}
$$

従って一見 $\nabla^2\phi = 0$ となりそうに思えるが、実は**上の計算では暗黙の裡に $\vec{x} \neq \vec{x'}$ を仮定していることに注意**。すなわち $\vec{x}$ と $\vec{x'}$ が等しくなる近傍では注意深く考察をし直さねばならない。実際、$\vec{x'}$ に対する積分は全空間にわたっているので、必ず $\vec{x'} = \vec{x}$ の点も含まれる。

<u>注意深い考え方</u>

問題となるのは $\vec{x}$ のまわりに半径 ϵ の小さな球を考えたときの、その <u>内部</u> での積分であ

る。このとき、危険である $\vec{x}=\vec{x'}$ となる点は避けたい。そこで、**体積積分をその表面での積分に直す Gauss の定理を使う**ことを考える。
計算したいのは、



$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{|\vec{x'}-\vec{x}|\le\epsilon} d^3x'\rho(\vec{x'})\nabla^2\frac{1}{|\vec{x'}-\vec{x}|} \tag{2.83}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{|\vec{x}-\vec{x'}|\le\epsilon} d^3x'\rho(\vec{x'})\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|} \tag{2.84}$$

今、ϵ を十分小さくとれば $\rho(\vec{x'})\simeq\rho(\vec{x})$ であり、また $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}(1/|\vec{x}-\vec{x'}|)=\vec{\nabla}'\cdot\vec{\nabla}'(1/|\vec{x}-\vec{x'}|)$ と書け、$\vec{\nabla}'(1/|\vec{x}-\vec{x'}|)=(\vec{x}-\vec{x'})/|\vec{x}-\vec{x'}|^3$ であるから

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(\vec{x}) &= \frac{\rho(\vec{x})}{4\pi\epsilon_0}\int_{|\vec{x}-\vec{x'}|\le\epsilon} d^3x'\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{x}-\vec{x'}}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3}\right)\\ &= \frac{\rho(\vec{x})}{4\pi\epsilon_0}\int_{|\vec{x'}-\vec{x}|=\epsilon}\epsilon^2 d\Omega\frac{\hat{n}\cdot(\vec{x}-\vec{x'})}{\epsilon^3} \qquad \leftarrow \text{Gauss' theorem}\\ &= -\frac{\rho(\vec{x})}{4\pi\epsilon_0}\int d\Omega = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}\end{aligned} \tag{2.85}$$

となり、確かに Poisson 方程式の一つの解になっていることがわかる。
マイナス符号は $\hat{n}$ が $\vec{x}-\vec{x'}$ と逆方向の単位ベクトルであることによる。

演習 2.8 静電ポテンシャルが次のいわゆる湯川型で与えられているとする。

$$\phi(r) = \frac{e^{-kr}}{r}, \qquad \left(k>0\,, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

(i) 電場 $\vec{E}(\vec{x})$ を求めよ。
(ii) ガウスの法則を用いて、原点を含む半径 R 内の電荷の総量を求めよ。
(iii) 原点の無限小近傍内の電荷量を求めよ。また、全空間の電荷の総量を求めよ。
(iv) 原点以外での 電荷密度を求めよ。
(v) 原点を除く 全空間における電荷の総量を求めよ。(ここで $\int_0^\infty drre^{-kr}=1/k^2$ を用いてよい。)この結果と (iii) の結果を比較してその整合性を論ぜよ。

解
(i)

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{x}{r^3}(1+kr)e^{-kr}\\ \therefore\quad \vec{E} &= \frac{\vec{r}}{r^3}(1+kr)e^{-kr}\end{aligned}$$

(ii)　ガウス則より

$$\begin{aligned} 4\pi R^2 E(R) &= \frac{Q(R)}{\epsilon_0} \\ \therefore \qquad Q(R) &= 4\pi\epsilon_0(1+kR)e^{-kR} \end{aligned}$$

(iii)　(ii) の結果より直ちに

$$\begin{aligned} \text{原点での電荷} &= Q(0) = 4\pi\epsilon_0 \\ \text{全電荷} &= Q(\infty) = 0 \end{aligned}$$

(iv)　Maxwell の方程式より、原点以外では

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\epsilon_0 \frac{k^2}{r} e^{-kr}$$

(v)　原点以外の電荷の総量は

$$\int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 dr = -4\pi\epsilon_0 k^2 \int_0^\infty dr r e^{-kr} = -4\pi\epsilon_0$$

従って原点と原点以外の電荷を加えるとちょうどゼロになっており、(iii) の結果と一致する。

2.6　基本的な電荷分布とそのつくる電位、電場

2.6.1　単電荷、及び電気双極子のつくる場

電場や電位に対する重ね合わせの原理は、電磁気学の一つの要である。これは逆に、**一般の電場や電位を「基本的な電荷分布」のつくる電場や電位の和に分解して考えることができる**ことを意味する。それでは「基本的電荷分布」として一体どういうものを考えるべきであろうか。まず直観的に基本的であると思われる電荷の配位を考察することから始めてみよう。

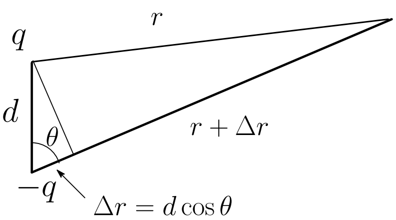
□ **1. 原点にある点電荷**:

これは基本的であろう。そのつくる電位は

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \tag{2.86}$$

□ **2. 電気双極子 (Electric Dipole)**:

原点近傍で図のような二つの近接した電荷のペア（全電荷はゼロ）がつくる電位を考える。



$d \ll r$、従って $\Delta r \ll r$ とすると、電位は

$$\begin{aligned} \phi_1(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r}-\frac{q}{r+\Delta r}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\Delta r}{r(r+\Delta r)} \\ &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2} \end{aligned} \tag{2.87}$$

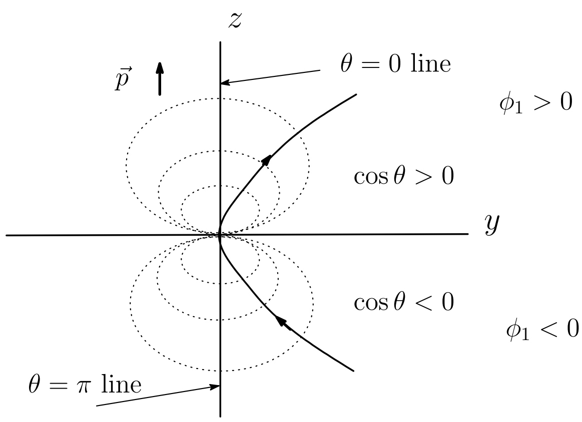
となる。ここで $\boldsymbol{p \equiv qd}$ **を一定に保って** $\boldsymbol{d \to 0}$ **の limit をとると**次の電位の形を得る。

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_1(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} \sim \frac{1}{r^2} \end{aligned}}$$

注：θ は $\vec{p}$ と $\vec{r}$ のなす角度。y 軸からの角度ではない。
第二式で $\vec{p}$ は $-q$ から q に向かう大きさ p のベクトルで、**電気双極子モーメント** (electric dipole moment) と呼ばれる。

□ 電気双極子のつくる電場 ::

電場の概略を見るには、まず等電位面 ($\leftrightarrow r^2 \propto \cos\theta$) を描き、それに直交するものとして電場を描けばよい。<u>z-y 平面に投影すると</u>



電場の表式は次のようになる：

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right) \tag{2.88}$$

演習 2.9　電気双極子の作る電位 ϕ_1 から電場 $\vec{E}_1$ を求めよ。

解　電位は

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \tag{2.89}$$

従って $\vec{E}_1$ の i 成分は

$$\vec{E}_{1,i} = -\frac{\partial}{\partial r_i}\phi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{p_i}{r^3} - \frac{3\vec{p}\cdot\vec{r}(\partial r/\partial r_i)}{r^4}\right) \tag{2.90}$$

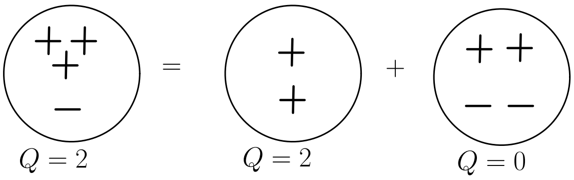
ここで、$\partial r/\partial r_i = r_i/r$ を用いると、

$$\vec{E}_{1,i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}_i - p_i\right) \tag{2.91}$$

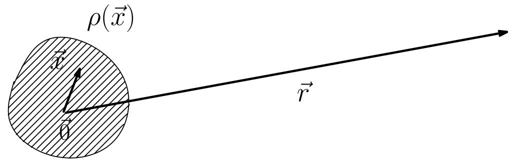
2.6.2　電位の多重極 (Multipole) 展開

単電荷や双極子といった電荷分布はどのような意味で「基本的」なのか。実は、これらは有限な領域内の任意の電荷分布が遠方につくる電場を記述する系統的な近似の第一項と第二項になっている。まず、非常に遠方からながめれば内部の構造は見えず全体の電荷があたかも一点に集まっているように見えるはずである。この寄与を取り除くと、残りは

全体としてゼロの電荷を持った電荷分布になる。そこでこれを少し近づいて見れば、まず大ざっぱに電荷の正負の偏りが見えるであろう。これが dipole 場である。典型的な例を図示すると



この描像を系統的に導こう。それには電位を $1/r$ の巾で展開すれば良い。



$\vec{r}$ での電位は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{r}-\vec{x}|}d^3x$$

以下 $r \equiv |\vec{r}|$, $x \equiv |\vec{x}|$ と記し、$r >> x$ として x/r について巾展開する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \\ &= \left(r^2 + x^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{x}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{x}}{r^2}\right)^{-1/2} \qquad (2.92) \\ & \qquad (2.93) \end{aligned}$$

ここで Taylor 展開の公式

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}y^2 + \cdots \tag{2.94}$$

を用いる。この公式を復習すれば、

$$\begin{aligned} (1+y)^\alpha &= 1^\alpha + y\frac{d}{dy}(1+y)^\alpha\Big|_{y=0} + \frac{1}{2}y^2\frac{d^2}{dy^2}(1+y)^\alpha\Big|_{y=0} + \cdots \\ &= 1 + y\alpha(1+y)^{\alpha-1}\Big|_{y=0} + \frac{1}{2}y^2\alpha(\alpha-1)(1+y)^{\alpha-2}\Big|_{y=0} + \cdots \\ &= 1 + \alpha y + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)y^2 + \cdots \end{aligned} \tag{2.95}$$

$$y = \left(\frac{x}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{x}}{r^2}, \qquad \alpha = -\frac{1}{2} \tag{2.96}$$

としてこの公式を (2.92) に用い、$(x/r)^2$ のオーダーまで求めると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \frac{1}{r}\left[1 + (-\frac{1}{2})\left(\left(\frac{x}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{x}}{r^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(\left(\frac{x}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{x}}{r^2}\right)^2 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{x}}{r^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{x}}{r^2}\right)^2 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{x}}{r^2} + \frac{1}{2r^4}\left(3(\vec{r}\cdot\vec{x})^2 - r^2x^2\right) + \cdots\right]
\end{aligned}$$

従って $\phi(\vec{r})$ は次のように展開される：

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x\rho(\vec{x})\frac{1}{r}\left[1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{x}}{r^2} + \frac{1}{2r^4}\left(3(\vec{r}\cdot\vec{x})^2 - r^2x^2\right) + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x\rho(\vec{x})\frac{1}{r}\left[1 + \sum_i \frac{x_i r_i}{r^2} + \frac{1}{2r^4}\sum_{i,j}\left(3x_ix_j - \delta_{ij}x^2\right)r_ir_j + \cdots\right]
\end{aligned} \tag{2.97}$$

ここで次のように **“モーメント”** を定義する：

$$\begin{aligned}
\text{全電荷} \quad Q &= \int d^3x\rho(\vec{x}) && (2.98) \\
\text{dipole moment} \quad p_i &= \int d^3x x_i\rho(\vec{x}) && (2.99) \\
\text{quadrupole moment} \quad Q_{ij} &= \int d^3x(3x_ix_j - x^2\delta_{ij})\rho(\vec{x}) && (2.100)
\end{aligned}$$

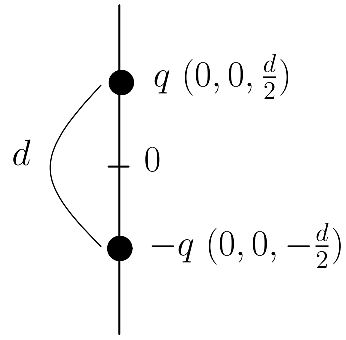
点電荷の集合に対しては、x_i は離散的な定数であるから、$\rho(\vec{x})$ を掛けた積分は、電荷を掛けて和をとることに帰着する。従ってこれらの表式は、n を点電荷のラベルとして、次のように簡単になる：

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_n q_n && (2.101) \\
p_i &= \sum_n (x_n)_i q_n && (2.102) \\
Q_{ij} &= \sum_n \left(3(x_n)_i(x_n)_j q_n - \delta_{ij}x_n^2 q_n\right) && (2.103)
\end{aligned}$$

これらを用いて電位をかくと

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \phi_0(\vec{r})+\phi_1(\vec{r})+\phi_2(\vec{r})+\cdots &(2.104)\\ \phi_0(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}\sim\frac{1}{r} &(2.105)\\ \phi_1(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}\sim\frac{1}{r^2} &(2.106)\\ \phi_2(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^5}\sum_{i,j}r_iQ_{ij}r_j\sim\frac{1}{r^3} &(2.107)\end{aligned}$$

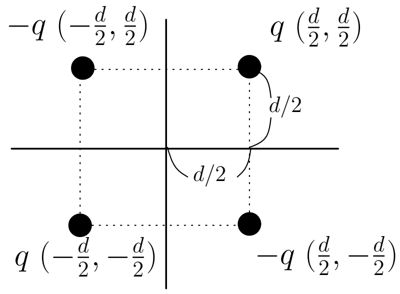
$\phi_1(\vec{r})$ はちょうど dipole 場の電位を表している。実際右図の dipole 電荷分布に対して p_i を計算すると、



$$\begin{aligned}p_z &= \frac{d}{2}q+(-\frac{d}{2})(-q)=qd\\ p_x &= p_y=0\end{aligned}$$

となり、以前の定義と一致する。

演習 2.10 図のような電荷分布に対して dipole 及び quadrupole モーメントを計算せよ。 またより高次ののモーメントは存在するか。次に qd^2 =fixed, $d\to 0$ の極限でこの電荷分布のつくる電位を求めよ。



解

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{d}{2}q+(-\frac{d}{2})(-q)+\frac{d}{2}(-q)+(-\frac{d}{2})q=0\\ \text{同様に}\quad p_y &= 0\end{aligned}$$

Quadrupole モーメントに関しては容易に $Q_{xy}=Q_{yx}$ のみゼロでないことがわかる。例えば

$$\begin{aligned}Q_{xx} &= 3\left(\frac{d}{2}\right)^2(q+(-q)+q+(-q))\\ &\quad -\left(\frac{d}{2}\right)^2(q+(-q)+q+(-q))=0\end{aligned}$$

Q_{xy} を計算すると、

$$Q_{xy} = 3\left(\frac{d}{2}\right)^2 q \times 4 = 3qd^2$$

高次のモーメントは当然存在する。しかし、$\boldsymbol{qd^2}$**=fixed, $\boldsymbol{d \to 0}$ の極限では**、高次のモーメントは全て $qd^n,\ (n \geq 3)$ に比例するからゼロになる。すなわち、**quadrupole moment はまさしくこの極限での四重極場を厳密に記述している**ことになる。従って電位は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3qd^2\,xy}{r^5}$$

で与えられる。

2.7 導体系とそれに伴う電荷分布、電位、及び電場

物質を電気伝導度で大まかに分類すると、

- **導体** (electric conductor):例　金属（伝導電子）、電解質の溶液（正負のイオン）
- **絶縁体** (insulator, or dielectric media)

に分かれる。導体系に関する静電気力学は、実用的にもまた理論的にも重要である。

2.7.1 静的な状態での導体の電気的特徴

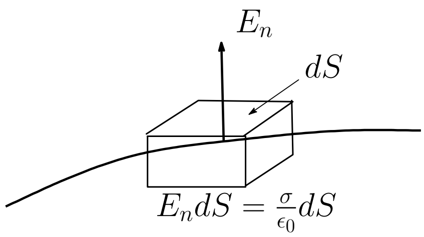
静的＝電流の流れがない状態

このときの導体の電気的特徴：

1. **導体中に電場なし**：← 電場があれば電流が生ずる。
2. **導体内で、電荷密度＝０**：← 電荷密度があれば,Gauss の法則でその回りに電場が生じてしまう。
3. 従って、**電荷や電場が存在できるのは表面のみ**。

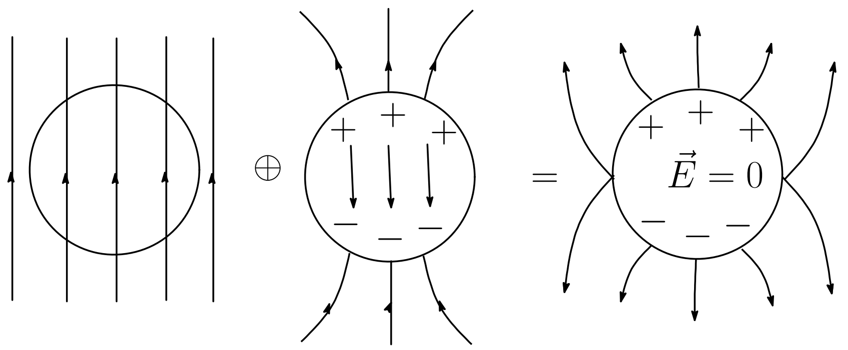
   電流が生じない為には**電場は表面に垂直**。その大きさは Gauss の法則を用いると

$$\boxed{E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad (2.108)}$$

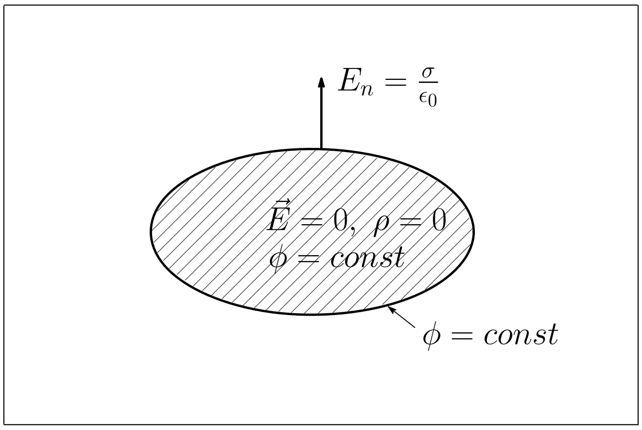


（電場は片側にのみできるので、その大きさは両側に分散する場合に比べて 2 倍になっていることに注意。）電荷分布は導体内部で $\vec{E} = 0$ となるように分布。あるいは表面も含めて電位 ϕ が一定になるように分布。

4. 外部電場中に導体をおくと、帯電していない場合でも表面に誘導電荷が現れる。これを**静電誘導**という。



上の 1. から 3. より、**静的な状態での導体**は、**「等電位体」**であり、**その特徴は次の図にまとめられる：**



2.7.2　導体の回りの静電場の求め方

今までは電荷分布 $\rho(\vec{r})$ が与えられたとして電位 $\phi(\vec{r})$ さらには電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を求めてきた。しかし**導体の場合は導体表面での電荷分布が事前にわからない**ので別な考え方をしなければならない。

□ **問題の設定の仕方**：

導体の回りの静電場は次の方針で求まる。

1. 導体内部ではすでに答は判っている：

$$\begin{aligned} \rho &= \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = 0 \\ \rightarrow \quad \phi(\vec{r}) &= c = const. \end{aligned}$$

2. 導体表面では (Dirichlet 型) 境界条件 (電位の値自体を指定する)

$$\phi \quad = \quad c = const. \tag{2.109}$$

を満たす。

3. この境界条件のもとで、導体の外部での Poisson 方程式

$$\boxed{-\nabla^2\phi \quad = \quad \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{(但し } \rho \text{ は外部の (真) 電荷のみ)} \quad (2.110)}$$

を解く。従って結局**外部の空間に限って境界値問題を解けば良い**ことになる。この限りにおいては内部が導体であることは全く考慮する必要はない。それどころか、この段階では、内部にどんな電荷分布を仮定してもよい。
導体であることは**内部解として $\phi =$ 一定 $=$ 表面上の値、を採用するところにのみ効いてくる。**

さて、Poisson 方程式 (2.110) の一般解はすでに求めてある。再掲すると

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} + f(\vec{r}) \tag{2.111}$$

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = 0 \tag{2.112}$$

問題は $f(\vec{r})$ の決め方である。無限遠でゼロになる解を考える限りにおいては $f(\vec{r}) = 0$ として良かったが、導体の問題では、有限領域にある導体表面上で **$\phi(\vec{r}) = c$ という境界条件を満足させるために、うまく $f(\vec{r})$ を選ばねばならない。しかも、$f(\vec{r})$ は Laplace 方程式の解でなければいけない。** 従って、一般には、Laplace 方程式の一般解の知識が必要になり、これは数学的に難しい。

しかし、幸いなことに、導体の形が簡単な場合には、次に述べる **Kelvin の鏡像法**と呼ばれるうまい考え方を用いることにより、一般的な方法よりはるかに簡単に解を（すなわち $f(\vec{r})$ を）求めることができる。

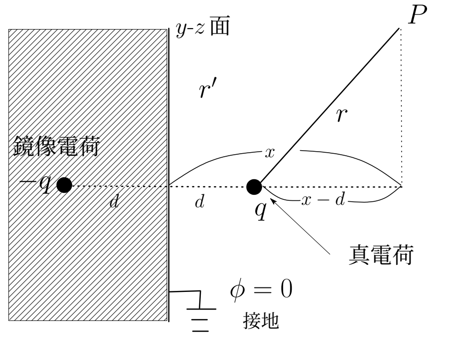
2.7.3 Kelvin の鏡像法

例1

図のように接地された無限の導体面からある距離に電荷 q がおかれているとき、任意の点 $P(x,y,z)$ での電位を求めよう。接地するということは、そこの電位を無限遠の電位と等しくする、すなわちゼロにするということである。外部での Poisson 方程式を満たす一つの解は明らかに Coulomb 場

$$\phi_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

で与えられる。しかし、これだけでは明らかに導体表面での境界条件 $\phi = 0$ を満たさない。



そこで、図のように**仮想的な鏡像電荷をおく**。この電荷のつくる電位は

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{r'}$$

と書けるが、仮想電荷は導体の内部に置いたのだから、外部では常に $r' \neq 0$ であり、従って Laplace 方程式を満たす。Laplace 方程式の解は加えても良いのであったから、これによる電位を加えると

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$

これは明らかに境界上でゼロという条件を満たしている。すなわち、適当な鏡像を考えることにより、 境界条件を満たすのに必要な Laplace 方程式の解 $f(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r})$ が簡単に得られたのである。

□ **導体表面上の電荷分布**：

さて、このとき導体表面にはどのような電荷分布ができているだろうか。これを求めるには、まず表面上での電場の x 成分 E_x を求め、$E_x = \sigma/\epsilon_0$ より σ を求めればよい。電位を

具体的に書くと

$$
\begin{aligned}
R^2 &\equiv y^2+z^2 \\
r &= \sqrt{(x-d)^2+R^2} \\
r' &= \sqrt{(x+d)^2+R^2} \\
\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+R^2}}\right) \qquad (\text{for } x\geq 0) \\
\phi &= 0 \qquad (\text{for } x<0)
\end{aligned}
$$

外部解を微分して E_x を求めると

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\phi_{ext} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-x+d}{((x-d)^2+R^2)^{3/2}}+\frac{x+d}{((x+d)^2+R^2)^{3/2}}\right)
\end{aligned}
$$

$x=0$ とおいて表面での値を求めると

$$
\begin{aligned}
E_x(0,y,z) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2d}{(d^2+R^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\sigma(y,z)}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

ゆえ表面電荷密度は

$$
\sigma(y,z) = \frac{-q}{2\pi}\frac{d}{(d^2+R^2)^{3/2}}
$$

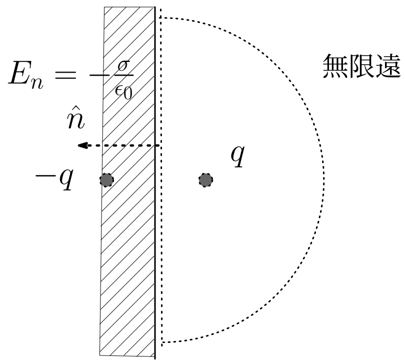
さらに誘導された全電荷量を求めよう。

$$
\begin{aligned}
Q_{ind} &= \int dy\,dz\,\sigma(y,z) \\
&= 2\pi\left(\frac{-qd}{2\pi}\right)\int_0^\infty \frac{RdR}{(d^2+R^2)^{3/2}} \\
&= -qd\frac{1}{d}\underbrace{\int_0^\infty \frac{udu}{(u^2+1)^{3/2}}}_{1} \qquad \leftarrow R=ud \;\; (\text{scaling の方法}) \\
&= -q
\end{aligned} \tag{2.113}
$$

従って誘導された全電荷はちょうど鏡像としておいた電荷の量に等しい。

演習 2.11　このことを Gauss の法則を用いて導け。

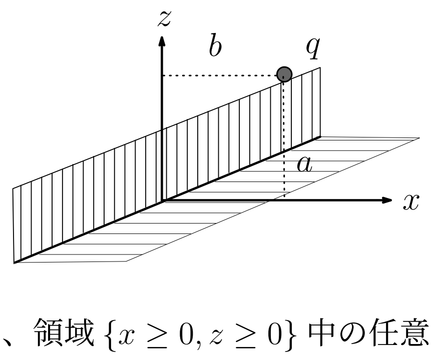
解　あくまでも外側の領域で議論する。図のような領域に Gauss 則を適用すると、法線の向きに注意して



$$q = -\underbrace{\int \sigma(y,z)dy\,dz}_{Q_{\text{誘導}}} + \underbrace{\epsilon_0 \int_{``\infty"} E_n dS}_{0}$$

無限遠からの寄与を求める際に重要なのは、無限遠からみると、鏡像電荷と真電荷のつくる場は dipole 場に等しいということである。**Dipole 場の電位は $\phi \sim 1/r^2$ ゆえ、電場は $|\vec{E}| \sim 1/r^3$ でおちる**。これに対して $dS \sim r^2 d\Omega$ だから、無限遠での積分はゼロになる。従って以前求めた結果 (2.113) をえる。

演習 2.12　図のように、折り曲げられ接地された一様な薄い導体面 ($z = 0, x \geq 0$ 面、及び $x = 0, z \geq 0$ 面よりなる）があり、位置 $(b, 0, a)$ に電荷 q がある場合を考える。



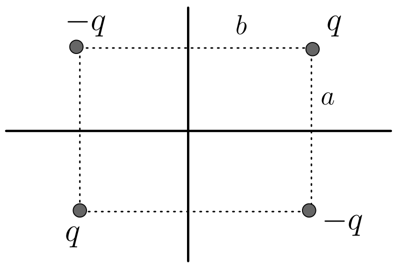
1. 鏡像法の考えを用いて、領域 $\{x \geq 0, z \geq 0\}$ 中の任意の点 (x, y, z) における電位を求めよ。

2. $a = b$ の場合に導体面に誘導される電荷密度を求めよ。また誘導電荷の総量を求めよ。但し次の公式を適宜用いよ。

$$\int \frac{dx}{(x^2+c^2)^{3/2}} = \frac{1}{c^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{x}{c}$$

解 鏡像電荷を次の図のように置けば導体上で電位 $= 0$ が満たされる。



(i) 電位 $\phi(\vec{x})$ は容易に

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{(x-b)^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{(x-b)^2+y^2+(z+a)^2}}\right.\\ &\quad \left. + \frac{-q}{\sqrt{(x+b)^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{q}{\sqrt{(x+b)^2+y^2+(z+a)^2}}\right)\end{aligned}$$

(ii) まず $z = 0$ 面を考える。ここでは E_z のみ non-zero で、 $a = b$ とおくと

$$E_z = -\partial_z\phi = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0}\left(((x+a)^2+y^2+a^2)^{-3/2} - ((x-a)^2+y^2+a^2)^{-3/2}\right)$$

表面電荷密度 $\sigma(x,y)$ は

$$\sigma(x,y) = \epsilon_0 E_z(x,y)$$

で与えられる。$z = 0$ 面上の電荷の総量は、これを積分して得られる。

$$\begin{aligned}Q_{z=0} &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty dy\sigma(x,y) = \frac{2qa}{4\pi}(I_+ - I_-)\\ I_\pm &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty dy\frac{1}{((x\pm a)^2+y^2+a^2)^{3/2}} \qquad (2.114)\end{aligned}$$

上記の公式を用いて y-積分を実行すると

$$I_\pm = 2\int_0^\infty dx\frac{1}{(x\pm a)^2+a^2}$$

この積分は容易に計算できる：

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty dx \frac{1}{(x+a)^2+a^2} &= \int_a^\infty \frac{du}{u^2+a^2} \\
\int_0^\infty dx \frac{1}{(x-a)^2+a^2} &= 2\int_0^a \frac{du}{u^2+a^2} + \int_a^\infty \frac{du}{u^2+a^2} \\
\therefore \qquad I_+ - I_- &= -4\int_0^a \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{-4}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}\bigg|_0^a = -\frac{\pi}{a}
\end{aligned}
$$

従って

$$
Q_{z=0} = \frac{qa}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{a}\right) = -\frac{1}{2}q
$$

同様に $Q_{x=0} = -\frac{1}{2}q$。従って、

$$
Q_{\mathrm{tot}} = -q
$$

2.8 電場のエネルギーの概念

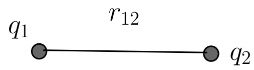
この節では、基本的な電荷分布の持つ静電エネルギーを求め、さらにそれがそれらのつくる電場自体に蓄えられているエネルギーとして解釈できることをみる。

2.8.1 静電エネルギー

すでに述べたように、電位と電荷の積はポテンシャルエネルギーの意味を持っている。簡単な電荷分布についてこの具体的な形を示す。

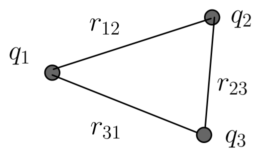
1. 二個の点電荷系の持つエネルギー：

$$U = q_1\phi_2 = q_2\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}} \tag{2.115}$$



2. 三個の場合：

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_3q_1}{r_{31}}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \end{aligned} \tag{2.116}$$



ここで 1/2 の因子は q_iq_j/r_{ij} と q_jq_i/r_{ji} の double counting を補正する因子。

3. n 個の場合：三個の場合より明らかに

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \tag{2.117}$$

4. $\{q_j\}$ $(j \neq i)$ が q_i の位置につくる電位による表式：　電位の表式は

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

であるから、上記の U は次のように書ける：

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i} \tag{2.118}$$

5. 連続的な電荷分布の場合：　次の置き換えをすれば良い。

$$
\begin{aligned}
q_i &\longrightarrow \rho(\vec{x})d^3x \\
\phi_i &\longrightarrow \phi(\vec{x}) \\
\sum_i &\longrightarrow \int d^3x
\end{aligned}
$$

従って

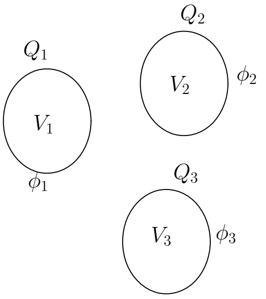
$$
\boxed{U = \frac{1}{2}\int d^3x\rho(\vec{x})\phi(\vec{x}) \qquad (2.119)}
$$

6. 電荷が導体上にあるとき: 導体上で ϕ =const であることから、静電エネルギーの表式は次のように簡単になる。

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\sum_i \int_{V_i} d^3x\,\rho(\vec{x})\phi_i \\
&= \frac{1}{2}\sum \phi_i \int_{V_i} d^3x\,\rho(\vec{x}) \\
&= \frac{1}{2}\sum Q_i\phi_i \qquad (2.120)
\end{aligned}
$$

ここで　V_i = i 番目の導体での積分

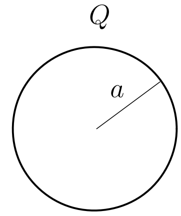
Q_i = i 番目の導体上の全電荷



すなわち、**静電エネルギーに関する限り、導体一つ一つをあたかも荷電粒子のように扱ってよい**。

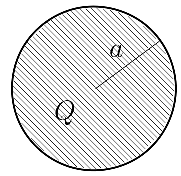
2.8.2 簡単な系の持つ静電エネルギー

1. 導体球： 球外の電場はあたかも中心に全電荷 Q があるときと同じであるから



$$
\begin{aligned}
\text{導体の電位} \quad \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a} \\
\text{ゆえ} \quad U &= \frac{1}{2}Q\phi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{a}
\end{aligned}
$$

2. 一様に帯電した球： 電荷密度を ρ とすると



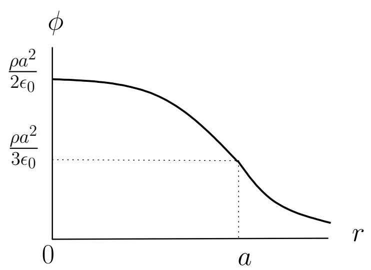
$$
\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \text{const.}
$$

球体内部での電位を求めよう。まず Gauss の法則より容易に

$$
\begin{aligned}
\text{for} \quad r \geq a \quad E_n(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \\
\text{for} \quad r \leq a \quad E_n(r) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\frac{(4/3)\pi r^3}{r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}
\end{aligned} \tag{2.121}
$$

原点から r の距離での電位 $\phi(r)$ は、外向き電場 E_n に逆らって無限遠から単位電荷を r の位置まで持って来るのに要する仕事であるから、

$$
\begin{aligned}
\phi(r) &= -\int_\infty^r E_n(r')dr' \\
&= -\int_\infty^a \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} - \int_a^r \frac{\rho r}{3\epsilon_0}dr \\
&= \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 a} - \frac{\rho}{6\epsilon_0}(r^2 - a^2) \\
&= \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3a^2 - r^2)
\end{aligned} \tag{2.122}
$$



これより

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\phi d^3x = \frac{\rho^2}{12\epsilon_0}\int_0^a (3a^2 - r^2)4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0} \tag{2.123}$$

次元解析による、答えの次元のチェック
この問題における物理量は半径 $[a] = L$ と電荷密度 $[\rho] = Q/L^3$.

$$\phi \sim EL \sim \frac{Q}{\epsilon_0 L} \tag{2.124}$$

$$U \sim Q\phi \sim \frac{Q^2}{\epsilon_0 L} \tag{2.125}$$

$$\text{一方} \qquad \rho^2 \sim \left(\frac{Q}{L^3}\right)^2 = \frac{Q^2}{L^6}$$

$$\therefore \qquad U \sim \frac{1}{\epsilon_0}\rho^2 L^5 \tag{2.126}$$

ゆえ、次元は確かに合っている。

コメント：原子核を ρ が半径によらない一定の球とみたとすると、

$$\begin{aligned} \text{質量} \quad M &\propto a^3 \\ U &\propto a^5 \\ \therefore \quad U &\propto M^{5/3} \end{aligned} \tag{2.127}$$

従って静電エネルギーは質量が大きくなるとその 5/3 乗で増える。これは重元素の原子核ほど大きなエネルギーを蓄えており、それを放出する分裂が起こりやすいことの原因となっている。

2.8.3 静電エネルギーの電場のエネルギーとしての解釈

静電エネルギー U を直接電場 $\vec{E}$ で書くことを考える。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int d^3x\rho\phi \\ \rho &= \epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \text{ を代入すると} \\ U &= \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3x\phi\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3x\left(\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\phi) - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\phi\right) \qquad \Leftarrow \text{部分積分} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\int dSE_n\phi + \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3x\vec{E}\cdot\vec{E} \qquad \Leftarrow \text{ガウスの定理} \end{aligned}$$

第一項の積分において、遠方では高々

$$E_n \sim \frac{1}{r^2}, \qquad \phi \sim \frac{1}{r}, \qquad dS \sim r^2$$

ゆえ、この積分は r が大きな極限で、$1/r \to 0$ であるから効かない。従って

$$\boxed{\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3x|\vec{E}|^2 \\ u(\vec{x}) &= \text{電場のエネルギー密度} = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 \end{aligned}}$$

補：点電荷の自己エネルギー

上で得た電場によるエネルギーの表式を最も簡単な点電荷の場合に適用してみよう。

$$\begin{aligned} E &= |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \\ U &= \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d^3x \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^\infty \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4}4\pi r^2 dr \\ &= \left[-\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]_0^\infty \\ &= \infty\,! \qquad (r=0\ \text{のところから発散}) \end{aligned}$$

この発散の原因は、点電荷それ自身との距離がゼロであることによる。あるいは、U の連続分布の式に持っていくときに $q_i \to \rho(\vec{x})d^3x$ としたが、この操作は点電荷それ自身をさらに無限小の部分に分割したことになっているためと考えてもよい。

Abraham の電磁質量の考え：　Abraham はこの現象を積極的に解釈しようとした。電子を半径 a の導体球と考える。するとその静電エネルギーは以前計算したように

$$U = \frac{1}{2}e\phi = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}$$

となる。相対論の考えよりこれを電子の質量エネルギーと解釈すると、

$$
\begin{aligned}
mc^2 &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} \\
\Rightarrow \quad a &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2} \simeq 1.4 \times 10^{-13}\, cm = \text{古典電子半径}
\end{aligned}
$$

という描像を得る。残念ながらこの考えは次の理由によりうまくいかない。
電子の運動に伴い、電場もまた歪んで運動してゆく。これに伴って**電場は運動量を運ぶ**。これを $|v| \ll c$ の場合に計算すると

$$
\vec{p} = \frac{4}{3}m\vec{v} \neq m\vec{v}
$$

となり正しい結果を与えない。
ゆえ、**点電荷の場合には、自己エネルギーを差し引いて考える**。電荷の総数が変化しないときには、エネルギーの原点をずらして考えれば何等支障はない。しかし、相対論的量子力学にいくと電荷の総数は保存しない (電子、陽電子共に正のエネルギーを持って対生成されうる。）のでこの考えは使えなくなる。そこでは**「繰り込み」**という手法で困難を回避するが完全に満足のいくものではない。本質的には非常に短距離での量子電磁気学の欠陥をあらわすものと考えられる。