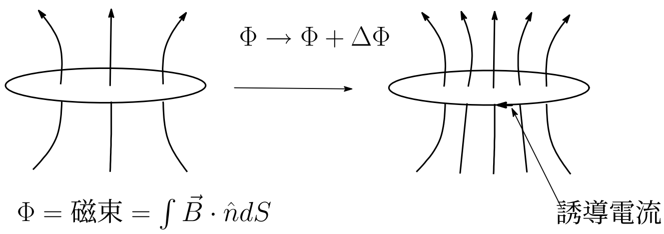
第5章　時間変化する電磁場

この章では、時間変化する電磁場を扱う。これによって電場と磁場が相互に誘導しあうものとして統一的に捉えられ、Maxwell の方程式系が完結する。またその最もドラマティックなあらわれとしての電磁波の基本的な性質を考察する。

5.1　磁場の時間変化：Faraday の電磁誘導の法則

5.1.1　Faraday の発見

1831:　エルステッドやアンペールの仕事に刺激された Faraday は、回路にかけた磁場を変化させる実験を行い次の現象を発見した。

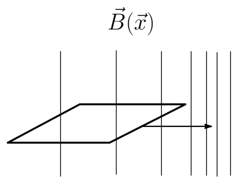


磁束 Φ の時間的増加 $\longrightarrow$ これを打ち消そうとする方向に (**Lentz の法則**) 電流を流そうとする起電力が生ずる。

ここで、**起電力**とは、**単位電荷が回路を一周するときに受ける仕事**をさす。正確な実験の結果を式で表すと

$$\boxed{\mathcal{E}(\text{起電力}) \quad = \quad -\frac{d\Phi}{dt}}$$

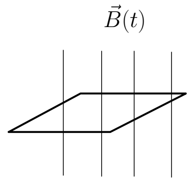
これは **Faraday の法則** (の積分形) と呼ばれる。



「磁場の時間変化」は見かけ上次の二つの起源が考えられる：

A　非一様な磁場中を回路が動く。

B　回路は静止。$\vec{B}$ が時間変化。



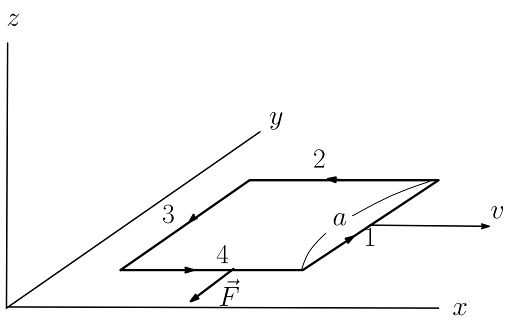
ちなみに、アインシュタインの特殊相対論の第一論文では、冒頭でこの二つの見かけ上異なる場合がどう統一的に理解されるかの問題を掲げ、それを相対論を考える一つの動機としている。

5.1.2　非一様な磁場中を回路が動いた場合

この場合は、回路の中の電子が速度を持つので、それが磁場によるローレンツ力を受けて、誘導起電力が生ずると考えられる。

□ **簡単な例**：

図のような長方形の回路が x 方向のみ非一様な z 方向の磁場 $\vec{B}(\vec{x})$ 中を運動する場合を考える。



回路中の 単位電荷 が受ける Lorentz 力は

$$\vec{F} \;=\; \vec{v}\times\vec{B}$$

この力によって電荷が回路を一周するときに受ける仕事は

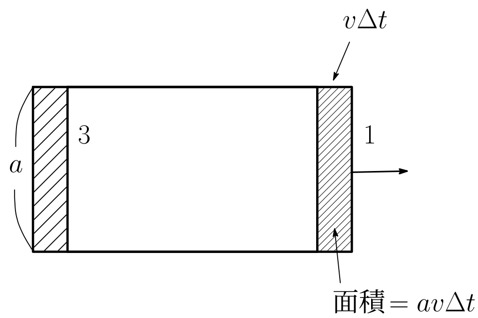
$$\mathcal{E} \;=\; \oint \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \qquad \text{積分は左回り}$$

辺２及び辺４では $\vec{F}$ と $d\vec{\ell}$ は直交するから仕事は受けない。また辺３（辺１）では $\vec{F}$ と $d\vec{\ell}$ は平行（反平行)。従って

$$\mathcal{E} \;=\; -avB(1)+avB(3)$$

一方、回路を貫く磁束の Δt 間の変化は、図より

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= B(1)\cdot av\Delta t - B(3)\cdot av\Delta t\\ &= -\Delta t\,(-avB(1)+avB(3))\end{aligned}$$



従って明らかに

$$\mathcal{E} \;=\; -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

が成立する。

一般の場合

より一般に任意の形の回路が任意の方向に運動する場合にも Faraday 則の積分形が成り立つことを証明できるが、少し難しい数学的操作がいるので割愛する。

Faraday 則から Maxwell 方程式へ

こうして導かれた Faraday 則を、Maxwell の第３方程式の形に書き直そう。**起電力**が生ずるということは、**電場ができていると解釈される**から、上記の法則を**電場と磁場の関係として表現**すれば良い。起電力は回路を一周するときに電場がする仕事であるから

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell}\\ &= \int(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\hat{n}dS \qquad \leftarrow \text{Stokes}\end{aligned}$$

一方これは $-d\Phi/dt$ に等しいから、これを磁束密度を用いて表すと

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot\hat{n}dS$$

これらは任意の回路について等しいから、積分をはずして

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

これが Maxwell の第 3 方程式、あるいは **Faraday 則の微分形**と呼ばれるものである。

5.1.3 $\vec{B}$ が時間変化する場合：相対性の考え

この場合は、すでにあつかった回路が運動する場合を、回路の静止系にいって考えることに等しい。これは単に見方の変更であるから、回路内の単位電荷にはやはり $\vec{v}\times\vec{B}$ の大きさの力が働くはずである。しかるに回路の静止系では、**電荷は動いていないので、磁場から力を受けない。** 従って、この系では $\boldsymbol{\vec{E}=\vec{v}\times\vec{B}}$ **なる電場ができている**とみるより他はない。

このとき**今度は磁場が時間的に変化**していることに注目する。時間 dt でのこの変化は

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \vec{B}(\vec{x}+\vec{v}dt)-\vec{B}(\vec{x}) \\ &= dt(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+\mathcal{O}(v^2) \\ \therefore \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \end{aligned}$$

これが $-\vec{\nabla}\times\vec{E}$ に等しいことがいえればよい。ベクトル解析の公式を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{E} &= \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \\ &= -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \qquad \leftarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \\ &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

従ってそのように考えればこの場合にも確かに同じ Faraday 則の微分形が成り立つことがわかる。

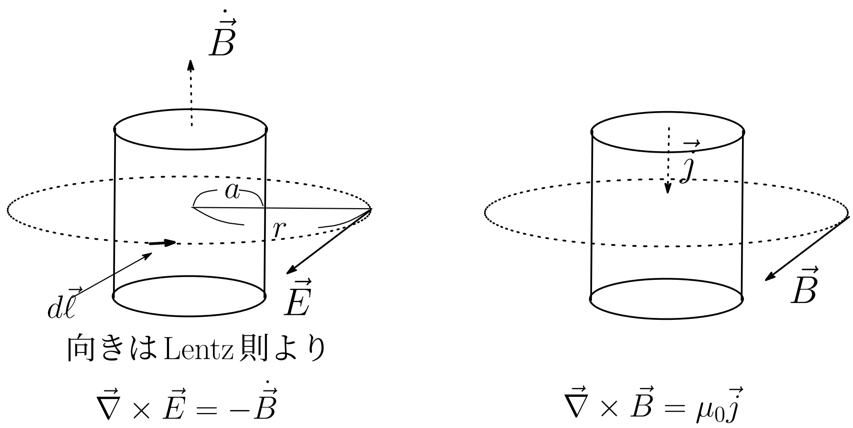
5.1.4 誘導電場の計算例

□ ソレノイド磁場の時間変化に伴う誘導電場の計算：

Faraday 則の形は、静磁場に対する Ampère 則の形と良く似ている。実際 $\vec{E} \to \vec{B}$、$-\partial\vec{B}/\partial t \to \mu_0\vec{\jmath}$ とすれば Faraday 則は Ampère 則の形になる：

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{\jmath}}$$

従って、直線電流に伴う磁場の生成の場合と比較して考えるとよい。(左図は $\dot{B} > 0$ の場合を表している。)



さて、実際に解くには Stokes の定理から得られる Faraday 則の積分形 を用いる。

$$\begin{aligned}\int dS\hat{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) &= \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \\ &= -2\pi r E(r)\end{aligned}$$

($-$ 符号は $d\vec{\ell}$ と $\vec{E}$ が逆向きであることによる。) 一方

$$-\int dS\hat{n}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \;=\; -\int dS\dot{B}_z = -\int dS\dot{B}$$

従って

$$E(r) \;=\; \frac{1}{2\pi r}\int dS\dot{B}$$

空間的には内部・外部で磁場は一様であり、特に外部では磁場はゼロであることを考慮して右辺を計算すると

$$\begin{array}{llcll} r \leq a \text{ のとき} & \int dS\dot{B} & = & \pi r^2\dot{B} & \longrightarrow \quad E = \dfrac{r}{2}\dot{B} \\ r \geq a \text{ のとき} & \int dS\dot{B} & = & \pi a^2\dot{B} & \longrightarrow \quad E = \dfrac{a^2}{2r}\dot{B} \end{array}$$

演習 5.1 Farday 則と Ampère 則の対応関係を使って、$r \geq a$ の場合の結果 $E = \frac{a^2}{2r}\dot{B}$ から直線電流のつくる磁場に対する答えが得られることを示せ。

演習 5.2 半径 a の円盤があり、その面にたいして垂直に大きさ B の一様な磁束密度がかかっている。この円盤を角速度 ω で回転させると、その中心と円周上の点の間に誘導起電力が生ずる。その大きさを求めよ。

5.2 電場の時間変化と Maxwell の変位電流

Faraday の法則は、磁場の時間変化に伴って、電場も時間変化をすることを意味している。それ以前に考察してきた状況では電場は静的なものとしてきたから、以前の法則が電場の時間変化がある場合にどうなるかを改めて考え直す必要がある。すなわち、これまででほぼ出そろった **Maxwell の方程式系が全体として矛盾がないかどうか**を見なればならない。

(1)　まず、Faraday 則と、磁荷が存在しないことが整合的であることを見よう。Faraday 則の両辺の divergence をとると、

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \therefore \qquad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= 0 = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

右辺は、磁荷が存在しないため確かにゼロにであり、うまく整合している。

(2)　次に、Ampère の法則が <u>時間変化を許す場合にどうなるか</u> を考えよう。<u>静磁場</u> の場合の形は

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

この divergence をとると

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

右辺は定常電流の場合には、電荷保存則によりゼロで無矛盾。しかし時間変化を許す場合には電荷保存の式は $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + (\partial\rho/\partial t) = 0$ と変更されるのでこのままでは矛盾してしまう。

　これを解決するヒントは Maxwell の第 1 方程式 (Coulomb 則) を考察することによりえられる。時間変化がある場合にも第 1 方程式の形が変更を受けないと <u>仮定</u> すると、

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

従って

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (5.1)}$$

を得る。従って電荷保存の式 $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + (\partial\rho/\partial t) = 0$ は、

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \tag{5.2}$$

と書ける。これより、電荷保存の式と整合するためには、Ampère 則の形を

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \;=\; \mu_0 \vec{\jmath} \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{\jmath} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

のように変更すべきことが示唆される。式 (5.2) は電場の時間変化がない場合には、定常状態における電荷の保存則に帰着するが、$\partial \vec{E}/\partial t \neq 0$ の場合には、電流に余分な項が付け加わることを示している。この項

$$\vec{\jmath}_M \;\equiv\; \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

は **Maxwell の変位電流**と呼ばれ、後に電磁波の存在を導く重要な役割を果たすことが示される。また、これは実際の電子の流れでつくられる $\vec{\jmath}$ がない領域でも、時間変化する電場がありさえすれば電流の流れが起こることを意味し、例えばコンデンサーに付与された電荷の大きさを変動させれば、その間の空間を越えて電流が流れるという現象の説明を与える。

こうして 変位電流項の付加により、Maxwell 方程式系は矛盾のない体系になる。そして実際実験はこうして変更された法則が正しいことを示している。特に電磁波の存在は決定的な証拠となった。

5.3　Maxwell 方程式系のまとめ

ここまでで、Maxwell の方程式が出そろったのでまとめておこう。

微分形：

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \mu_0\vec{\jmath}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

積分形：　Gauss 及び Stokes の定理を用いて

$$\begin{aligned}
\epsilon_0\int_{\partial V} dS\vec{E}\cdot\hat{n} &= \int_V d^3x\rho = Q \\
\int dS\vec{B}\cdot\hat{n} &= 0 \\
\int_{\partial\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{\ell} &= -\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma dS\vec{B}\cdot\hat{n} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \\
\int_{\partial\Sigma}\vec{B}\cdot d\vec{\ell} &= \int_\Sigma dS\left(\mu_0\vec{\jmath}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\hat{n}
\end{aligned}$$

これらの方程式に、次の Lorentz 力の式を併せて電磁力学の体系が完成する：

$$\boxed{\vec{F} \;=\; q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)}$$

□ **補遺: 電場と磁場の法則の比較** :

電荷密度および電流密度の作る電場と磁場の表式を思い出そう。

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x' \frac{\rho(\vec{x'})(\vec{x}-\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3} \tag{5.3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{\vec{\jmath}(\vec{x'})\times(\vec{x}-\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3} \tag{5.4}$$

これらの形はかなり異なっている。それは磁場の源としての磁荷が存在しないことによるのであった。しかし、実は電場と磁場の間には隠れた美しい関係がある。

電場をポテンシャルで表す式を思い出そう。

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \tag{5.5}$$

これに対応する磁場のポテンシャルは存在するであろうか。磁場による Lorentz 力は仕事をしないという特性があるので、電場のように仕事により蓄えられるポテンシャルは存在しない。しかし、$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ の性質から、$\vec{B}$ を次のように書くことができる：

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{5.6}$$

実際、恒等的に $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$ であるから、そのような $\vec{A}$ が存在する。これは**ベクトルポテンシャル**と呼ばれる。ここでは証明はしないが、$\vec{A}$ は $\vec{\jmath}$ から次のように求まる：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{\vec{\jmath}(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|} \tag{5.7}$$

(この $\vec{A}$ に対して $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ を計算すると、(5.4) が得られる。) これは Coulomb 電位の表式

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x' \frac{\rho(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|} \tag{5.8}$$

と同じ形になっている! この背後には、相対性理論の美しい構造があるのだが、ここでは割愛せざるを得ない。

5.4 真空中の Maxwell 方程式と電磁波

Maxwell 理論の正しさを示す最も衝撃的な事柄は、電磁波の存在の予言とその検証 (H. Herz, 1888) であった。この節では真空中の Maxwell 方程式を調べ、その解として現れる電磁波の基本的な性質について述べる。

5.4.1 真空中の Maxwell 方程式

Maxwell 方程式を思い起こそう。

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{\jmath} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

特に真空中、すなわち <u>電荷や電流の分布のない領域</u> では、この方程式は次のような、電場と磁場についてほぼ対称的で簡単な形をとる：

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \left(\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 \right)
\end{aligned}$$

5.4.2　真空中の電磁波の方程式

まず、上記の方程式を組み合わせて磁場を消去し、電場 $\vec{E}$ の満たす方程式を導こう。第3の式の rotation をとり、第1、第4式を用いると、

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \\
\text{左辺} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} \\
\text{右辺} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}
\end{aligned}$$

従って

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0}$$

を得る。（この意味は、$\vec{E}$ の各成分が同じ方程式を満たすということ。）

同様に、第4式から出発して $\vec{B}$ に対する方程式を導くと、$\vec{E}$ と同じ形の方程式を得る：

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0}$$

これらを電磁場に対する**波動方程式**と言う。Maxwell 方程式中の 変位電流の項 が重要な役割を果たしていることに注目せよ。

演習 5.3　$\vec{B}$ に対する方程式を導け。直に計算し直しても良いが、真空中の Maxwell 方程式が、次の 双対変換 に対して不変である（第1式と第

２式、また第３式と第４式が入れ替わる）ことを用いれば直ちに $\vec{B}$ が $\vec{E}$ と同じ形の波動方程式を満たさねばならないことがわかる。

$$\text{双対変換} \qquad \begin{cases} \vec{E}/c \longrightarrow \vec{B} \\ \vec{B} \longrightarrow -\vec{E}/c \end{cases}$$

5.4.3　波動方程式の平面波解

　波動方程式は線型であるから、幾つかの解の重ね合わせもまた解となる。逆に言えば、一般の解を基本的な解の重ね合わせとして表すことが考えられる。その際の基本解としてしばしば用いられるのが、これから述べる**平面波解**　である。

一次元の場合

まず手始めに１次元の場合を考えよう。（あるいは、３次元で t, x にのみ依り y, z に依らない解を考えると言っても良い。）一つの成分についての１次元の波動方程式は

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\zeta(x,t) = 0}$$

と書ける。この方程式の解き方はいろいろあるが、最も簡単で示唆に富むのはいわゆる「因数分解」による方法である。$\partial/\partial t$ と $\partial/\partial x$ は可換であるから、上式に現れている２次の演算子は数を扱うと同じように次のように因数分解できて、方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial(ct)} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta(x,t) = 0.$$

と書ける。より見やすい形に書くために、変数を (x, t) から以下に定義す

る新しい変数 (x^+, x^-) に変える。

$$\begin{aligned} x^{\pm} &\equiv x \pm ct, \qquad i.e. \quad x = \frac{1}{2}(x^+ + x^-), \quad ct = \frac{1}{2}(x^+ - x^-), \\ \frac{\partial}{\partial x^+} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial (ct)}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x^-} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial (ct)}\right) \end{aligned}$$

すると波動方程式は

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-}\zeta(x^+, x^-) = 0}$$

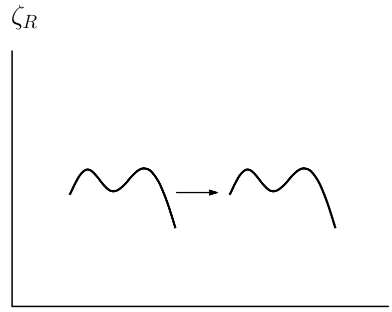
となる。

これを解くには、まず $\partial_-\zeta = \psi$ とおくと、方程式は $\partial_+\psi = 0$ と書けるから、ψ は x^- のみの任意関数。これを $f(x^-)$ とおけば、もとの方程式は $\partial_-\zeta(x^+, x^-) = f(x^-)$ となるから、これを積分すると、結局 $\zeta_R(x^-), \zeta_L(x^+)$ をそれぞれ x^-, x^+ の <u>任意関数</u> として

$$\boxed{\zeta(x^+, x^-) = \zeta_R(x^-) + \zeta_L(x^+)}$$

が一般解であることがわかる。

$\zeta_R(x - ct)$ が一定値をとるような x, t の値は $x - ct = const.$ できまるから、$x = ct + const.$ であり、これは明らかに右向きに <u>速度 c で伝わる波</u> を表している。同様に $\zeta_L(x + ct)$ は左向きの波を表す。これを図示すると



最も基本的な解

上で見たように波の形は任意で良いが、特に次の三角関数波の形は基本的である。

$$\zeta_R = a(k)\sin(k(x-ct)) \quad \text{または} \quad \zeta_R = a(k)\cos(k(x-ct))$$

これらはまとめて複素形で書ける：

$$\boxed{\zeta_R = a_R(k)\mathrm{e}^{ik(x-ct)}}$$

ここで k は**波数**と呼ばれる。波の特徴を表す量を波数を用いて表しておこう。

$$\begin{aligned}
&\text{波長 }\lambda \qquad k\lambda = 2\pi \longrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \\
&\text{周期 }T \qquad kcT = 2\pi \longrightarrow T = \frac{2\pi}{ck} \\
&\text{振動数 }\nu \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{ck}{2\pi}
\end{aligned}$$

左向きの波も同様に複素数で表すと、

$$\zeta_L = a_L(k)\mathrm{e}^{ik(x+ct)}$$

さらに、既に注意した波動方程式の線型性から、これらの波を重ね合わせたものもまた解になる。従って一般解は

$$\zeta(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ \left(a_R(k)\mathrm{e}^{ik(x-ct)} + a_L(k)\mathrm{e}^{ik(x+ct)}\right)$$

の形に書ける。

5.4.4　2次元以上の場合

　空間の次元が増えると、波の進む方向は2通りではなくなるはずである。従って、波の進行方向を決めていた波数 k はベクトル化されて**波数ベクトル** $\vec{k}$ となり、基本解が次のような形で得られることが予想される。

$$\zeta^{\pm}_{\vec{k}}(\vec{x},t) = a^{\pm}(\vec{k})\mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}\mp|\vec{k}|ct)}$$

演習 5.4　実際これが波動方程式 $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\zeta = 0$ を満たすことを確かめよ。

基本解の意味

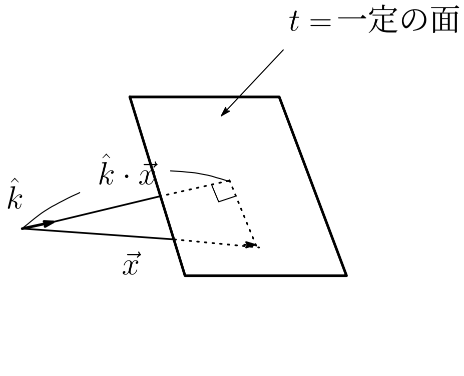
振幅 $\zeta^{+}_{\vec{k}}$ が一定値をとるところは

$$|\,\vec{k}\,|\,ct - \vec{k}\cdot\vec{x} = const.$$

であるが、時間の原点を適当に取って $const. = 0$ とし、$|\,\vec{k}\,|$ で割ると、

$$\hat{k}\cdot\vec{x} = ct$$

となる。これは図のように t が一定の平面が時間と共に $\hat{k}$ の方向に速さ c で進んでいくことを表しているので、**平面波解**と呼ばれる。



5.4.5　電磁場に対する平面波解

　電磁場の場合に平面波解を複素形で書くと

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{\epsilon}_E(\vec{k})\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|k|ct}\\ \vec{B} &= \vec{\epsilon}_B(\vec{k})\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|k|ct}\end{aligned}$$

ここで $\vec{\epsilon}_E,\ \vec{\epsilon}_B$ は振幅の変化する方向を表すベクトルで、**polarization vector (偏極ベクトル)** と呼ばれる。上の複素形では偏極ベクトルも複素数であり、**真の電磁場は上の表式の実部をとることにより得られる**。この書き方は慣れると sin と cos の一次結合で書くよりはるかに便利である。

平面電磁波の特徴

上記の平面波は Maxwell 方程式を組み合わせて得られた波動方程式の解ではあるが、我々の欲しいのはもともとの個々の Maxwell 方程式の解である。従って上記の形を再度 Maxwell 方程式に代入して、真の解となるために偏極ベクトルや波数が満たすべき条件を導かなければならない。これから、以下に述べるような重要な電磁波の性質が導かれる。

(1)　電磁波は横波：　（すなわち偏極の方向は進行方向に垂直）。

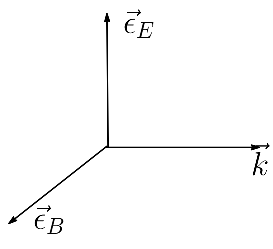
$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= 0 \longrightarrow \vec{k}\cdot\vec{\epsilon}_E(\vec{k}) = 0 \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \longrightarrow \vec{k}\cdot\vec{\epsilon}_B(\vec{k}) = 0
\end{aligned}
$$

(2)　$\vec{\epsilon}_E,\ \vec{\epsilon}_B,\ \vec{k}$ **は右手直交系をなす：**　まず、平面波解が $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ を満たす条件を考えると

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\epsilon}_E(\vec{k})\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|k|ct}\right) \\
&= i\vec{k}\times\vec{\epsilon}_E\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|k|ct} \\
\text{右辺} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\epsilon}_B(\vec{k})\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|k|ct}\right) \\
&= i|\vec{k}|c\vec{\epsilon}_B\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i|k|ct}
\end{aligned}
$$

これより

$$
\vec{k}\times\vec{\epsilon}_E = |\vec{k}|c\vec{\epsilon}_B
$$



同様にして、$\vec{\nabla}\times\vec{B} = -(1/c)(\partial\vec{E}/\partial t)$ より

$$
\vec{k}\times\vec{\epsilon}_B = -\frac{1}{c}|\vec{k}|\vec{\epsilon}_E
$$

以上見てきたように、Maxwell 方程式は電場や磁場が波動として真空中を速度 $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ で伝わっていくことを表す。Maxwell はその速度と当時すでにかなりの精度で知られていた光速度との一致から、光の正体が電磁波であると看破したのである。Maxwell の予言した電磁波は 1888 年 Herz によって検証され、Maxwell 理論の正しさを決定づけることとなった。