電磁気学第２章演習問題

演習 2.1　Coulomb という単位は実は非常に大きい。(落雷の放電は数クーロン程度。)
1 Kg, 1C の２つの電荷をどれほどの距離におくと、地上重力と同じ力になるか。

演習 2.2　陽子に対して重力とクーロン力の比はどれほどになるか。但し

$$m_p = 1.672 \times 10^{-27}\ kg\,, \qquad e_p = 1.602 \times 10^{-19}\ C \tag{2.1}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/Kg^2 \tag{2.2}$$

演習 2.3　z-軸上に単位長さあたり τ の線密度で一様に分布する電荷がつくる電場を求めたい。

(1) まず、対称性と次元解析を用いて、結果の形を予想せよ。
(2) 実際に計算を行って電場を求めよ。

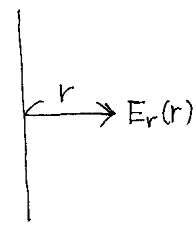

図 em2-5

演習 2.4　半径 a の一様に帯電した球 (全電荷 Q) がつくる電場を求めよ。特に球の内部ではどうなるか。

演習 2.5　y-z 平面に電荷面密度 σ で一様に分布した電荷がつくる電場を求めよ。

演習 2.6　半径 R の無限に長い円筒の側面上に、電荷が一様な面密度 σ で分布しているとき生ずる電場を求めよ。

演習 2.7　(1) 無限に長い直線 (z 軸) 上に線密度 τ で一様に分布した電荷による電位を求めよ。但し、直線から垂直距離 a の点での電位を 0 と定める。
注意：いったん直線の長さを有限（例えば $2l$) にとって計算し、しかるのち $l \to \infty$ の極限を考えること。
(2) 得られた電位から電場を求めよ。

演習 2.8　関数列 $f_n(x) = n/(\pi(1+n^2x^2))$ が $n \to \infty$ で次の性質を満たし、従って $\delta(x)$ になることを示せ。

- a, b を任意の正の定数とするとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x) = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-a}^b f_n(x) = 1$$

演習 2.9　静電ポテンシャルが次のいわゆる湯川型で与えられているとする。

$$\phi(r) \;=\; \frac{e^{-kr}}{r}\,, \qquad \left(k>0\,, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

(i)　電場 $\vec{E}(\vec{x})$ を求めよ。
(ii)　ガウスの法則を用いて、原点を含む半径 R 内の電荷の総量を求めよ。
(iii)　原点の無限小近傍内の電荷量を求めよ。また、全空間の電荷の総量を求めよ。
(iv)　原点以外での 電荷密度を求めよ。
(v)　原点を除く 全空間における電荷の総量を求めよ。（ここで $\int_0^\infty dr r e^{-kr} = 1/k^2$ を用いてよい。）この結果と (iii) の結果を比較してその整合性を論ぜよ。

演習 2.10　電気双極子の作る電位 ϕ_1 から電場 $\vec{E}_1$ を求めよ。

演習 2.11　図のような電荷分布に対して dipole 及び quadrupole モーメントを計算せよ。またより高次のモーメントは存在するか。次に qd^2 を固定して $d \to 0$ の極限をとるとき、この電荷分布のつくる電位を求めよ。

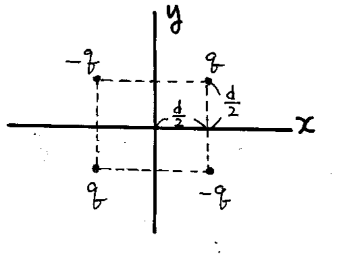

図 em2-25

演習 2.12　図のように、接地された無限の導体面から距離 d のところに電荷 q が置かれている。導体面上に誘導される電荷の総量が $-q$ になることを、Gauss の法則を用いて導け。

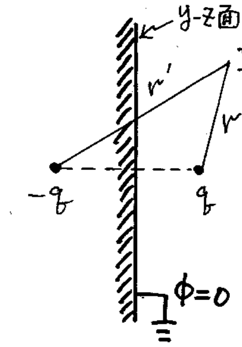

図 em2-28

演習 2.13　図のように、折り曲げられ接地された一様な薄い導体面 $(z=0, x\geq 0$ 面、及び $x=0, z\geq 0$ 面よりなる）があり、位置 $(b,0,a)$ に電荷 q がある場合を考える。

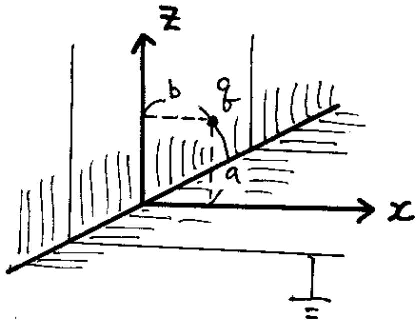

図 em2-44

1. 鏡像法の考えを用いて、領域 $\{x\geq 0, z\geq 0\}$ 中の任意の点 (x,y,z) における電位を求めよ。
2. $a=b$ の場合に導体面に誘導される電荷密度を求めよ。また誘導電荷の総量を求めよ。但し次の公式を適宜用いよ。

$$\int \frac{dx}{(x^2+c^2)^{3/2}} = \frac{1}{c^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}$$
$$\int \frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{x}{c}$$

演習 2.14　図のように接地された半径 a の球殻の外側の領域に電荷 q があるとき、球面上に誘導された電荷の総量を Gauss の法則を用いて求めよ。また、その電荷分布を求めよ。これを積分して Gauss 則から得た結果と比較せよ。

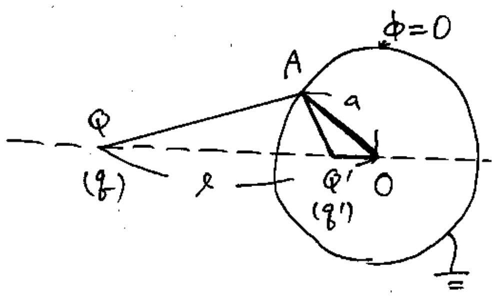

図 em2-30

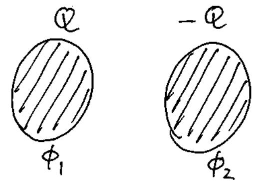

図 em2-39

演習 2.15　二つの導体が図のように帯電している (電位 ϕ_1, ϕ_2)。これをコンデンサーと見るとき、その容量 C を電位係数 D_{ij} で表せ。

演習 2.16　図に示した同心球面コンデンサーについて容量係数を計算し、次の性質を確かめよ。

$$
\begin{aligned}
C_{ij} &= C_{ji} \qquad i \neq j \\
C_{ii} &\geq 0 \\
C_{ij} &\leq 0
\end{aligned}
$$

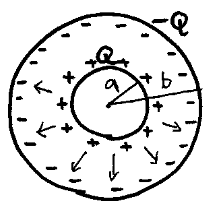

図 em2-41

演習 2.17　図のような平行板コンデンサーに働く力の大きさ F が $F = Q^2/2\epsilon_0 S$（S は平行板の面積）となることを、直接 Coulomb 力を計算することによって導け。

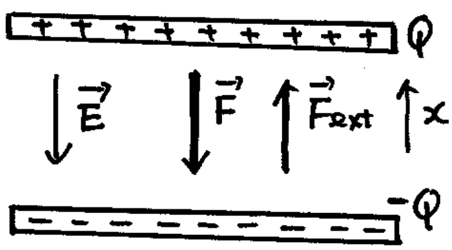

図 em2-43