

4 対称性の原理と場の量子化

4.1 Noether の定理

4.2 Schwinger の作用原理

4.3 自由場の量子論

4.4 Invariant function と Feynman propagator の性質

4.1 Noether の定理

系の対称性(変換に対する不変性)の帰結を表現する基本定理:

Emmy Noether (1918)

- **基本定理** : 一般の変換に対する作用の不変性から従う帰結
応用 : 第一定理: 変換が有限次元の群の作用である場合
第二定理: 変換が無限次元の群(ゲージ群)の作用である場合

□ **基本定理** :

簡単のため一種類の場 $\phi(x)$ がある場合を考える。(複数の場がある場合へ

の拡張は容易。)作用の一般形を次の形に書く¹：

$$S = \int_{\Omega} [dx] \mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x)) \quad (1)$$

$[dx]$ は積分測度を表し、 Ω は積分領域を表す。

次の一般的な無限小変換を考える

$$x^{\mu} \rightarrow y^{\mu} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu}, \quad \Omega \rightarrow \Omega' \quad (2)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(y) = \phi(x) + \Delta\phi(x) \quad (3)$$

ϕ' は関数形の変化を表す。 Δ は total change を表す記号である。

注:

- $\phi(x)$ が “スカラー” である場合には、 $\Delta\phi = 0$ 。

また、内部対称性の場合には $\Delta x^{\mu} = 0$ 。

Lie 変分: 同一座標点での場の形の変化を Lie 変分と呼び $\bar{\delta}$ で表す。(3) の左辺は微少量の一次までで、 $\phi'(x + \Delta x) = \phi'(x) + \Delta x^{\mu} \partial_{\mu}\phi(x)$ と書けるから、

¹高階の微分、 $\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi$ 等、を許す場合への拡張は演習とする。

$$\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \Delta\phi(x) - \Delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (4)$$

$$\text{従って } \Delta\phi(x) = \bar{\delta}\phi(x) + \Delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (5)$$

Lagrange 微分: Lagrange 微分 $\delta\mathcal{L}/\delta\phi$ を次のように定義する :

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} \quad (6)$$

明らかに、 ϕ が運動方程式を満たす \Leftrightarrow Lagrange 微分がゼロ

Noether の基本定理:

1. 基本恒等式: 上記の一般的な無限小変換のもとでの作用の変化は次のよ

うに書ける

$$S' - S = \int_{\Omega} [dx] \left(\partial_{\mu} j^{\mu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta} \phi \right) \quad (7)$$

ここで current j^{μ} は

$$j^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \bar{\delta} \phi + \Delta x^{\mu} \mathcal{L} \quad (8)$$

2. 基本定理: 上記の変換が系の対称変換である場合、すなわちそれに対して作用が任意の領域 Ω において不変である場合、局所的に

$$\partial_{\mu} j^{\mu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta} \phi = 0 \quad (9)$$

が成り立つ。さらに、運動方程式を満たす配位に対しては、カレントの保存 $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$ が成り立ち、space-like surface Σ 上の積分で定義される charge

が保存される：

$$0 = \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \partial_\mu j^\mu = \int_{\Sigma_2} j^\mu d\Sigma_\mu - \int_{\Sigma_1} j^\mu d\Sigma_\mu \quad (10)$$

$$\therefore Q(\Sigma_1) = Q(\Sigma_2), \quad Q(\Sigma) \equiv \int_{\Sigma} j^\mu d\Sigma_\mu \quad (11)$$

特に、 Σ を $t = \text{一定}$ の面にとればそれに直行するベクトル $d\Sigma_\mu$ は $(d^3x, 0, 0, 0)$ となり、 $Q = \int d^3x j^0$ と表される。

- 明らかに、基本定理は基本恒等式から直ちに従う。
- この段階での j^μ はまだ変換の parameter を含んでいることに注意。

証明： 変換後の作用は

$$S' = \int_{\Omega'} [dy] \mathcal{L}(\phi'(y), \partial_\mu \phi'(y)) \quad (12)$$

まず場の変化を y での Lie 変分で書き表す。すなわち $\phi'(y) = \phi(y) +$

$\bar{\delta}\phi(y)$ 、等々。すると、微小量の一次のオーダーまでとって

$$S' = \int_{\Omega'} [dy] \mathcal{L}(\phi(y), \partial_\mu \phi(y)) + \int_{\Omega} [dx] \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \bar{\delta}\phi \right) \quad (13)$$

第一項では積分領域がまだ最初のものとは異なっているので、これをもとに戻すために、 x での表式に書き換える。すると

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} [dy] \mathcal{L}[y] &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| [dx] \mathcal{L}[x + \Delta x] \\ &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| [dx] (\mathcal{L}[x] + \Delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}) \end{aligned} \quad (14)$$

(ここで $\partial_\mu \mathcal{L}$ は、 \mathcal{L} の全ての x 依存性についての微分。) ヤコビアンは次のように計算される。行列 M を $M_\mu^\nu \equiv \partial_\mu \Delta x^\nu$ と定義すると

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| &= \det |1 + M| = \exp \text{Tr} \ln(1 + M) \simeq \exp \text{Tr} M \simeq 1 + \partial_\mu \Delta x^\mu \\ \therefore [dy] &= [dx] (1 + \partial_\mu \Delta x^\mu) \end{aligned} \quad (15)$$

これらを代入すると

$$\begin{aligned}
S' &= \int_{\Omega} [dx] (1 + \partial_{\rho} \Delta x^{\rho}) \left(\mathcal{L} + \Delta x^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \bar{\delta} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \partial_{\mu} \bar{\delta} \phi \right) \\
&= \int_{\Omega} [dx] \left[\mathcal{L} + \partial_{\mu} (\Delta x^{\mu} \mathcal{L}) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta} \phi + \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \bar{\delta} \phi \right) \right] \\
&= \int_{\Omega} [dx] \left[\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \bar{\delta} \phi + \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \bar{\delta} \phi + \Delta x^{\mu} \mathcal{L} \right) \right] \tag{16}
\end{aligned}$$

第1項は S を与えるから、これを引くと、基本恒等式(7)を得る。//

Remark 1: ヤコビアンの計算を幾何学的に理解する方法もある。(13)の第一項と S の差をとると

$$\int_{\Omega'} [dy] \mathcal{L}[y] - \int_{\Omega} [dx] \mathcal{L}[x] \tag{17}$$

領域 Ω' は Ω から Δx^{μ} だけずれているから、 Ω の境界の面積要素を $d\Sigma_{\mu}$ と置くと Ω' と Ω の差 $\partial\Omega$ の部分の体積は $\Delta x^{\mu} d\Sigma_{\mu}$ で与えられる。従って、上記の差は

$$\int_{\partial\Omega} d\Sigma_{\mu} \Delta x^{\mu} \mathcal{L}[x] = \int_{\Omega} [dx] \partial_{\mu} (\Delta x^{\mu} \mathcal{L}) \tag{18}$$

これはちょうど Δx^μ に依存する部分の寄与を与えている。

Remark 2: S を不変にしない任意の変換の場合を考えよう。基本恒等式はこの場合でも成り立っている。このとき、運動方程式を満たす配位を考え、領域を space-like な面 Σ_1, Σ_2 に囲まれた部分とすると

$$\Delta S = \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} [dx] \partial_\mu j^\mu = G[\Sigma_2] - G[\Sigma_1] \quad (19)$$

$$G[\Sigma] = \int_\Sigma j^\mu d\Sigma_\mu \quad (20)$$

を得る。この式は次節で述べる Schwinger の作用原理の基本式となる。

□ 簡単な適用例 :

1. 1粒子の場合のエネルギー保存

Lagrangian L が時間 t に陽に依らない、すなわち $L = L(x(t), \dot{x}(t))$ の形ならば、作用は時間並進

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon \quad (21)$$

に対して不変である。このとき 粒子の座標 $x(t)$ は並進に対してスカラー、すなわち $\Delta x = 0$ であるから、Lie 変分は

$$\bar{\delta}x = 0 - \epsilon \partial_t x = -\epsilon \dot{x} \quad (22)$$

基本定理を適用すると、このとき次の“カレント”が保存する

$$j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \bar{\delta}x + \epsilon L = p(-\epsilon \dot{x}) - \epsilon L = \epsilon(L - p\dot{x}) = -\epsilon H \quad (23)$$

ϵ は任意であるから H が保存する。

2. $U(1)$ 対称性をもつ複素スカラー場理論における保存則

$\phi(x)$ を複素スカラー場として、次の Lagrangian を考える

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 |\phi|^2 - \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 \quad (24)$$

このとき \mathcal{L} (および作用) は次の global な $U(1)$ 変換に対して不変

$$\phi'(x) = e^{-ie\Lambda} \phi(x) \quad (25)$$

Λ を無限小とすれば

$$\Delta \phi(x) = \bar{\delta} \phi(x) = -ie\Lambda \phi(x) \quad (26)$$

$$\Delta \phi(x)^* = \bar{\delta} \phi(x)^* = ie\Lambda \phi(x)^* \quad (27)$$

基本定理より、次のカレントが保存する

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \bar{\delta} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} \bar{\delta} \phi^* = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi^* (-ie\Lambda \phi) + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi (ie\Lambda \phi^*) \\ &= \frac{ie}{2} \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \Lambda \end{aligned} \quad (28)$$

Λ は任意であるから、有限な保存カレントとして

$$J^\mu = \frac{ie}{2} \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (29)$$

を得る。

□ Noether の第一定理 :

作用を不変にする変換はそれを何度も適用してもやはり作用を不変に保つから、変換群 G をなす。 G の次元、すなわち parameter の数、が有限の場合と無限の場合 (いわゆるゲージ変換の場合) は、少し異なる様相を示す。

Noether の第一定理は G が有限な Lie 群の場合に基本定理を適用したものである。

x^μ および ϕ に対する G の生成子を X_a および T_a とし、無限小の global な変

換 parameter を ϵ^a と記す。具体的には

$$\Delta x^\mu = \epsilon^a X_a x^\mu = \epsilon^a (\xi_a^\nu(x) \partial_\nu) x^\mu = \xi_a^\mu(x) \epsilon^a \quad (30)$$

$$\Delta \phi = \epsilon^a T_a \phi \quad (31)$$

(ϕ はこの場合多成分場であるが、その成分の添え字は省略する。) Lie 変分は

$$\bar{\delta} \phi = \Delta \phi - \Delta x^\mu \partial_\mu \phi = (T_a \phi - \xi_a^\mu \partial_\mu \phi) \epsilon^a \quad (32)$$

この変換に対して系が不変ならば、基本定理に代入し、 ϵ^a をはずすと次の有限な関係式を得る：

Noether の第一定理

$$\partial_\mu j_a^\mu = - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} (T_a \phi - \xi_a^\mu \partial_\mu \phi) \quad (33)$$

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} (T_a \phi - \xi_a^\mu \partial_\mu \phi) + \xi_a^\mu \mathcal{L} \quad (34)$$

運動方程式が成り立てば、currents j_a^μ は保存する。

Remark 1: 上記の変換に対して不変な Lagrangian \mathcal{L} に、対称性を破る付加項を \mathcal{K} 付け加えた場合を考える。系全体の運動方程式が満たされているとすると、

$$\frac{\delta(\mathcal{L} + \mathcal{K})}{\delta\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = -\frac{\delta\mathcal{K}}{\delta\phi} \quad (35)$$

\mathcal{L} の部分に対しては Noether の定理 (33) が成り立つ。従って、この場合には current の保存則は付加項により破れ

$$\partial_\mu j_a^\mu = \frac{\delta\mathcal{K}}{\delta\phi} (T_a\phi - \xi_a^\mu \partial_\mu\phi) \quad (36)$$

の形の partial conservation が成り立つ。

Remark 2:

- $\Delta x^\mu = 0$ 、すなわち内部対称性の場合は、カレントは (8) の第一項のように簡単な形になる。この場合は、基本定理は $\bar{\delta}\mathcal{L} = 0$ 、すなわち、

Lagrangian 自体が不変であることを意味する。実際

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta}\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\partial_\mu\bar{\delta}\phi \\
 &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\bar{\delta}\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\bar{\delta}\phi\right) \\
 &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\bar{\delta}\phi + \partial_\mu j^\mu = 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

ここで、1行目は単なる variation であり 2行目はそれを書き換えたもの。3行目で基本定理を用いた。

● 逆に言えば、 $\Delta x^\mu \neq 0$ の一般の場合、*Lagrangian* の Lie variation で不変にならない部分は $\Delta x^\mu \mathcal{L}$ 項を与える。すなわち

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta}\mathcal{L} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\bar{\delta}\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\bar{\delta}\phi\right) \\
 &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\bar{\delta}\phi + \partial_\mu j^\mu - \partial_\mu(\Delta x^\mu \mathcal{L}) = -\partial_\mu(\Delta x^\mu \mathcal{L})
 \end{aligned} \tag{38}$$

ここで、 j^μ は基本定理に現れる保存カレント $(\partial\mathcal{L}/\partial\partial_\mu\phi)\bar{\delta}\phi + \Delta x^\mu \mathcal{L}$ 。

Remark 3: 内部対称性の場合は、保存カレントを求めるのに、global parameter ϵ^a を $\epsilon^a(x)$ のように local 化する手法が使える。こうすると Lagrangian はもはや不変でなくなるが、それは $\partial_\mu \phi$ の変換において ϵ^a を local 化したことから余分に生ずる項、すなわち $T_a \phi \partial_\mu \epsilon^a$ のためであるから、

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} T_a \phi \partial_\mu \epsilon^a = j_a^\mu \partial_\mu \epsilon^a \quad (39)$$

これより、 $\partial_\mu \epsilon^a$ の係数として j_a^μ を読み取ることができる。

- $\Delta x^\mu = \xi_a^\mu \epsilon^a \neq 0$ の場合: 恒等式 (38) から出発する。ここで j^μ は local parameter $\epsilon^a(x)$ を含んでいるから、 $\partial_\mu j^\mu$ を $\partial_\mu \epsilon^a$ を含む部分と含まない部分に次のように分けられる:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu j_a^\mu \epsilon^a + j_a^\mu \partial_\mu \epsilon^a \quad (40)$$

ここで j_a^μ は (34) で与えた保存カレント

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} (T_a \phi - \xi_a^\nu \partial_\nu \phi) + \xi_a^\mu \mathcal{L} \quad (41)$$

ϵ^a が global のときを考えると、基本方程式 $(\delta \mathcal{L} / \delta \phi) + \partial_\mu j_a^\mu \epsilon^a = 0$ が成

り立つから、(38)は次のように書き換えられる

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta}\mathcal{L} &= j_a^\mu \partial_\mu \epsilon^a - \partial_\mu (\Delta x^\mu \mathcal{L}) \\
 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} (T_a \phi - \xi_a^\nu \partial_\nu \phi) \partial_\mu \epsilon^a + \xi_a^\mu \mathcal{L} \partial_\mu \epsilon^a - \partial_\mu (\xi_a^\mu \epsilon^a \mathcal{L}) \\
 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} (T_a \phi - \xi_a^\nu \partial_\nu \phi) \partial_\mu \epsilon^a - \partial_\mu (\xi_a^\mu \mathcal{L}) \epsilon^a \\
 &= j_a^{\mu,0} \partial_\mu \epsilon^a - \partial_\mu j_a^{\mu,1} \epsilon^a \tag{42}
 \end{aligned}$$

まとめると、保存カレント j_a^μ は $\bar{\delta}\mathcal{L}$ の $\partial_\mu \epsilon^a$ および ϵ^a に比例する部分を読み取ることにより次のように求められる (符号に注意)

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = j_a^{\mu,0} \partial_\mu \epsilon^a - \partial_\mu j_a^{\mu,1} \epsilon^a \tag{43}$$

$$j_a^\mu = j_a^{\mu,0} + j_a^{\mu,1} \tag{44}$$

例: 1粒子の場合のエネルギー保存

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x), \quad \bar{\delta}x = -\epsilon\dot{x} \quad (45)$$

ここで $\epsilon = \epsilon(t)$ と考えると

$$\begin{aligned} \bar{\delta}L &= \dot{x} \frac{d}{dt}(-\epsilon\dot{x}) + \epsilon\dot{x} \frac{dV}{dx} = -\dot{\epsilon}\dot{x}^2 - \epsilon\dot{x}\ddot{x} + \epsilon\dot{x} \frac{dV}{dx} \\ &= -\dot{\epsilon}\dot{x}^2 - \epsilon \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - V \right) \end{aligned} \quad (46)$$

これより $j^0 = -\dot{x}^2$, $j^1 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - V$ 。従って、求める保存カレントは $j^0 + j^1 = -\frac{1}{2}\dot{x}^2 - V = -H$ となる。

□ Noetherの第二定理：

1. 次に、ゲージ変換に対して不変な理論に基本定理を適用する。Local parameter $\epsilon^a(x)$ による一般的なtotal変分が $\epsilon^a(x)$ と $\partial_\mu \epsilon^a(x)$ に線形な次の形の場合を考える：

$$\Delta\phi = A_a(x, \phi, \partial\phi)\epsilon^a(x) + B_a^\mu(x, \phi, \partial\phi)\partial_\mu\epsilon^a(x) \quad (47)$$

$$\Delta x^\mu = C_a^\mu(x)\epsilon^a(x) \quad (48)$$

Lie 変分は $\bar{\delta}\phi = \Delta\phi - \Delta x^\mu \partial_\mu \phi$ であるから、やはり $\Delta\phi$ と同タイプであるので、これを次のように書く

$$\bar{\delta}\phi = a_a(x, \phi, \partial\phi)\epsilon^a(x) + b_a^\mu(x, \phi, \partial\phi)\partial_\mu\epsilon^a(x) \quad (49)$$

ここで

$$a_a = A_a - \partial_\mu \phi C_a^\mu \quad (50)$$

$$b_a^\mu = B_a^\mu \quad (51)$$

(非可換) ゲージ変換は ($\Delta x^\mu = 0$ とした) このタイプである。特にゲージ場の変換に対しては B_a^μ 項はゼロでない。

例: Maxwell 理論

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (52)$$

Lagrange 微分 $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} \quad (53)$

ゲージ変換は

$$\bar{\delta} A_\mu = \partial_\mu \Lambda \quad (54)$$

$$\therefore b_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad \epsilon = \Lambda, \quad A = 0 \quad (55)$$

基本定理を適用すると

$$\partial_\mu j^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} (a_a \epsilon^a + b_a^\mu \partial_\mu \epsilon^a) = 0 \quad (56)$$

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} (a_a \epsilon^a + b_a^\rho \partial_\rho \epsilon^a) + \Delta x^\mu \mathcal{L} \quad (57)$$

となり、運動方程式を満たす配位に対して、 j^μ が保存する。但し、これは場のみで書かれておらず、まだ local parameter $\epsilon^a(x)$ を含んでいる。

- $\epsilon^a(x)$ の特殊な取り方として x に依らない global な変換を考えることができる。その場合には、上記の式で $\partial_\mu \epsilon^a = 0$ とした関係式が成り立つ。

2. ゲージ不変な理論の場合には、基本定理を書き換えることにより、非常に有用な情報を得ることができる。そのために、まず (56) の第3項を書き換える：

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} b_a^\mu \partial_\mu \epsilon^a = \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} b_a^\mu \epsilon^a \right) - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} b_a^\mu \epsilon^a - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \epsilon^a \partial_\mu b_a^\mu \quad (58)$$

すると、(56) は次の形になる：

$$\left(a_a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} b_a^\mu \right) \right) \epsilon^a = -\partial_\mu \left(j^\mu + b_a^\mu \epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \right) \quad (59)$$

領域 Ω の boundary $\partial\Omega$ 上で $\epsilon^a(x) = \partial_\mu \epsilon^a(x) = 0$ となるように parameter

$\epsilon^a(x)$ をとると、そこでは $j^\mu = 0$ となるから、この式を積分すると、右辺はゼロとなる。従って

$$\int_{\Omega} [dx] \left(A_a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} B_a^\mu \right) \right) \epsilon^a = 0 \quad (60)$$

を得る。 Ω の内部では $\epsilon^a(x)$ はまだ任意だから、結局次のlocalな関係式を得る：

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} b_a^\mu \right) = a_a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \quad (61)$$

これを導くのに、運動方程式は用いていない。従って、ゲージ不変な理論に対しては恒等的に成立する式である。

- これはさらに “covariant conservation” の形に書き換えることができる。いま b_a^μ の逆行列 h_μ^b を $b_a^\mu h_\mu^b = \delta_a^b$ と定義すると、 $a_a = a_b \delta_a^b = (a_b h_\mu^b) b_a^\mu$

であるから、(61)は次の形に書ける：

$$\nabla_{\mu} \left(b_a^{\mu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \right) = 0 \quad (62)$$

$$\nabla_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - a_b h_{\mu}^b \quad (63)$$

この“covariant conservation”の式は、あくまでも恒等式を書き換えただけであり、何かの物理量の保存を表しているのではないことに注意する。

例1. Maxwell理論の場合： (61)を書き下すと

$$\partial_{\rho} (\delta_{\nu}^{\rho} \partial_{\mu} F^{\mu\nu}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\mu} \partial_{\nu} F^{\mu\nu} = 0 \quad (64)$$

これは確かに恒等式。

例2. Scalar 電気力学の場合： $\phi = \text{complex scalar}$

Lagrangian は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_{\mu} \phi)^* D^{\mu} \phi \quad (65)$$

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + ie A_{\mu} \quad (66)$$

ゲージ変換は

$$\bar{\delta} A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \quad \bar{\delta} \phi = -ie\Lambda\phi \quad (67)$$

すなわち

$$a_\mu = 0, \quad b_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (68)$$

$$a_\phi = -ie\phi, \quad b_\phi^\nu = 0 \quad (69)$$

$$a_{\phi^*} = ie\phi^*, \quad b_{\phi^*}^\nu = 0 \quad (70)$$

Lagrange 微分は

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^\nu} = \partial^\mu F_{\mu\nu} - J_\nu \quad (71)$$

where $J_\nu = \frac{i}{2} e (\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\nu \phi) - e^2 A_\nu \phi^* \phi \quad (72)$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = -\frac{1}{2} (D^\mu D_\mu \phi)^* \quad (73)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^*} = -\frac{1}{2} (D^\mu D_\mu \phi) \quad (74)$$

(61)式を書くと

$$\begin{aligned} 0 &= -ie\phi \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} + ie\phi^* \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^*} - \partial^\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^\nu} \\ &= -ie\phi \left(-\frac{1}{2}(D^\mu D_\mu \phi)^* \right) + ie\phi^* \left(-\frac{1}{2}(D^\mu D_\mu \phi) \right) \\ &\quad - (\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} - \partial^\nu J_\nu) \end{aligned} \tag{75}$$

- これが実際恒等式を与えていることは容易に確かめることができる。
 - さらに、trivilaな恒等式 $\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0$ を用いたあと、 ϕ の運動方程式 $D^\mu D_\mu \phi = 0$ を課すと、結果としてカレントの保存則 $\partial^\nu J_\nu = 0$ が得られる。すなわち、ゲージ場に対する運動方程式は、それだけからゲージ場の source current の保存を要求する構造になっている。
 - このカレント J_ν は、globalな変換に対する不変性から導かれる Noether current に一致することが容易に確かめられる。
-

さて、恒等式(61)を(59)に入れると、直ちに次の保存則を得る：

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu \left(j^\mu + b_a^\mu \epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \right) \\
&= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} (a_a \epsilon^a + b_a^\nu \partial_\nu \epsilon^a) + C_a^\mu \epsilon^a \mathcal{L} + b_a^\mu \epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \right) \\
&= \partial_\mu \left(J_a^\mu \epsilon^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} b_a^\nu \partial_\nu \epsilon^a + b_a^\mu \epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \right) \tag{76}
\end{aligned}$$

ここで

$$J_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} a_a + C_a^\mu \mathcal{L} \tag{77}$$

であり、これは ϵ^a を global にしたときに得られる通常のカレントに他ならない。

さてここで 運動方程式を課すと $\delta \mathcal{L} / \delta \phi = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu \left(J_a^\mu \epsilon^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} b_a^\nu \partial_\nu \epsilon^a \right) \\
&= (\partial_\mu J_a^\mu) \epsilon^a + \left(J_a^\mu + \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi} b_a^\mu \right) \right) \partial_\mu \epsilon^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} b_a^\nu \partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a \tag{78}
\end{aligned}$$

$\epsilon^a(x)$ は完全に任意であるから、これより3つの関係式が同時に得られる：

$$(i) \quad \partial_\mu J_a^\mu = 0 \quad (79)$$

$$(ii) \quad J_a^\mu = -\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi} b_a^\mu \right) \quad (80)$$

$$(iii) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} b_a^\nu \partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} b_a^\nu \text{は } \mu, \nu \text{ に関して反対称} \quad (81)$$

(iii) の反対称テンソルを

$$\mathcal{F}_a^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi} b_a^\mu \quad (82)$$

と置くと、(ii) は $J_a^\mu = -\partial_\nu \mathcal{F}_a^{\mu\nu}$ となり、 $\mathcal{F}_a^{\mu\nu}$ の反対称性から (i) は自明に成り立つ。

まとめ： Local 対称性の場合には global 対称性によって保存するカレント J_a^μ は必ず反対称テンソル $(\partial \mathcal{L} / \partial \partial_\nu \phi) b_a^\mu$ の divergence で書け、自明に保存する形になる。従って、Gauss の定理により保存 charge は2次元表面積分で

書ける：

$$Q_a = \int_V d^3x J_a^0 = - \int d^3x_V \partial_i \mathcal{F}_a^{i0} = \int_{\partial V} dS \hat{n}_i \mathcal{F}_a^{0i} \quad (83)$$

これは Gauss の法則の拡張に他ならない。

演習 1. Maxwell 理論および scalar 電気力学の場合に、具体的にこれを確かめよ。

4.2 Schwinger の作用原理

量子力学の別な定式化。

古典解析力学の Hamilton-Jacobi 形式の量子版。

量子化の規則と量子的なネーター (Noether) の定理を統一的に得ることができる。

4.2.1 粒子に対する量子作用原理

□ Hamilton-Jacobi 形式の復習 :

一般化された座標 $q_k(t)$, $k = 1 \sim n$ で記述される粒子系を考える。時間間隔 $t_1 \leq t \leq t_2$ に対する古典的な作用は、

$$S_{21}[C] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (84)$$

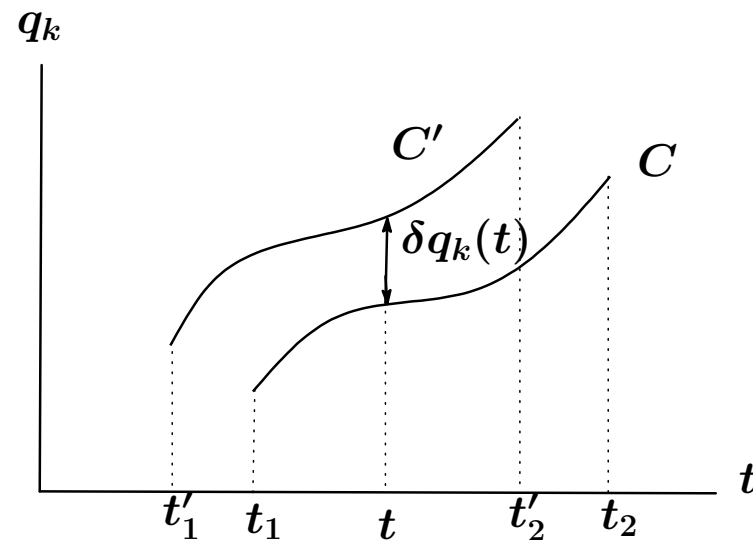
ここで C は軌跡を表す。良く知られたように、端点を固定して 変分 δq_k を行くと、運動方程式が得られる:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (85)$$

ここで、条件をゆるめて、端点の変化も許すことにしてみる。すると、次のような二つの隣接する軌跡 C と C' を考えることになる。

$$\begin{aligned} C : & \quad q_k(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ C' : & \quad q'_k(t) = q_k(t) + \delta q_k(t), & t'_1 \leq t \leq t'_2 \\ & \quad t'_i = t_i + \Delta t_i, & i = 1, 2 \end{aligned}$$

ここで、 Δt_i 及び δq_k はどちらも非常に小さいとする。



端点の差を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
 \Delta q_k(t_i) &\equiv q'_k(t'_i) - q_k(t_i) \\
 &= q'_k(t'_i) - [q_k(t_i) + \delta q_k(t_i)] + \delta q_k(t_i) \\
 &= q'_k(t'_i) - q'_k(t_i) + \delta q_k(t_i) \\
 &= \dot{q}'_k \Delta t_i + \delta q_k(t_i) \simeq \dot{q}_k \Delta t_i + \delta q_k(t_i)
 \end{aligned} \tag{86}$$

さて、 C と C' に沿った作用を比べよう。 C' に沿った作用は、

$$S_{21}[C'] = \int_{t'_1}^{t'_2} dt L' = \int_{t'_1}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t'_2}$$

ここで $L' \equiv L(q'_k, \dot{q}'_k, t)$

従って、小さな量の一次までのオーダーで、作用の差は

$$\begin{aligned}
 \therefore \Delta S_{21} &= S_{21}[C'] - S_{21}[C] = \int_{t_1}^{t_2} (L' - L) dt + [L \Delta t]_1^2 \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \delta q_k dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + L \Delta t \right]_1^2
 \end{aligned}$$

第二項を (86) を用いて書き直し、ハミルトニアン¹の定義を使うと

$$\begin{aligned} \Delta S_{21} &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \delta q_k dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Delta q_k - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) \Delta t \right]_1^2 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \delta q_k dt + [p_k \Delta q_k - H \Delta t]_1^2 \end{aligned} \quad (87)$$

従って、運動方程式を満たす軌跡に対して

$$\Delta S_{21} = [p_k \Delta q_k - H \Delta t]_1^2 \quad (88)$$

を得る。右辺は端点での量(表面項)のみに依っていることに注意。
端点1を固定して、 S を端点2の量の関数と見ると、これより

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k \quad (89)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \quad (90)$$

すなわち古典力学の Hamilton-Jacobi 方程式を得る。

□ 量子論に対する Schwinger の原理

ここまでの考察は完全に古典的である。以下ではこれを量子力学の場合に拡張することを考える。

量子論においては、古典的な“軌跡”は遷移振幅に置き換えられ、時間並進、空間並進ならびに空間回転による軌跡の変化は状態ベクトルのユニタリ変換 $U = e^{iG}$ で表現される。無限小の変化に対してこれを書くと、

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= U|\psi\rangle \simeq (1 + iG)|\psi\rangle \\ \therefore \Delta|\psi\rangle &= iG|\psi\rangle, \quad \Delta\langle\psi| = \langle\psi|(-iG) \end{aligned} \quad (91)$$

遷移振幅の変化は、ket の変化と bra の変化を合わせて、

$$\begin{aligned} \Delta\langle q_k(t_2), t_2 | q_k(t_1), t_1 \rangle &= \langle q_k(t_2), t_2 | iG(t_1) | q_k(t_1), t_1 \rangle - \langle q_k(t_2), t_2 | iG(t_2) | q_k(t_1), t_1 \rangle \\ &= \langle q_k(t_2), t_2 | \frac{1}{i} (G(t_2) - G(t_1)) | q_k(t_1), t_1 \rangle \end{aligned} \quad (92)$$

となる。中央に現れている演算子は、 G の端点での差である。これは、以前に ΔS_{21} 中に現れた表面項に似ている。

Schwingerの作用原理: Schwingerは作用 S をハイゼンベルグ演算子 $q_k(t)$ の量子的汎関数と見なし、次の基本的関係式を原理として導入した:

$$\Delta S_{21} = G(t_2) - G(t_1) \quad (93)$$

ここで ΔS_{21} は(87)に現れたものである。(93)の右辺はエルミートであるから、作用もまたエルミートでなければならない。

通常、 $[p, q] = -i$ の量子化条件の代わりにこれを原理として用いるという提案。

以下で見るように、この非常に簡単な仮定から、量子化に関する多くの本質的な性質が、整合的に得られる。

Schwinger の作用原理の帰結

1. (87) で与えられる ΔS_{21} の形と比較すると、体積積分の部分がゼロになることが要請される。これはハイゼンベルグ演算子に対する量子論的な運動方程式が古典的な形に一致することを言っている。但し、量子論では演算子の順序が問題になるので、ここでは適当な順序が存在することを仮定している。

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (94)$$

2. 運動方程式が満たされる物理的な場合には、上記の原理は、次の演算子間の関係式に帰着する：

$$G(t) = p_k \Delta q_k - H \Delta t \quad (95)$$

これより、

$$\Delta|q_k, t\rangle = iG(t)|q_k, t\rangle = i(p_k \Delta q_k - H \Delta t)|q_k, t\rangle \quad (96)$$

となり、これより

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q_k} |q_k, t\rangle = p_k |q_k, t\rangle \quad (97)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} |q_k, t\rangle = H |q_k, t\rangle \quad (98)$$

が得られる。これは量子化の規則および Schrödinger 方程式に他ならない。

これらは明らかに古典力学の Hamilton-Jacobi 形式の方程式の量子版になっている。

- 状態ベクトルのユニタリー変換に対応して、量子的演算子 \mathcal{O} は次のように変換される：

$$\mathcal{O}' = U \mathcal{O} U^\dagger = (1 + iG) \mathcal{O} (1 - iG) \simeq \mathcal{O} + i[G, \mathcal{O}]$$

これより、

$$\Delta \mathcal{O} = i[G, \mathcal{O}] \quad (99)$$

この式から、次のように正準量子化の規則を導出できる。

\mathcal{O} として $\mathcal{O} = q_j$ ととり、 $\Delta t = 0$ の場合を考える。さらに、変分 Δq_j をc数とする。すると、 $G = p_k \Delta q_k$ であるから、(99)は次のようになる：

$$\Delta q_j = i[p_k \Delta q_k, q_j] = i[p_k, q_j] \Delta q_k \quad (100)$$

これが任意の変分 Δq_j に対して成り立つためには、

$$i[p_k, q_j] = \delta_{kj} \quad (101)$$

とならなければならないが、これは通常の正準的な量子化の規則(97)に他ならない。

4. 作用が座標変換に対して不変な場合には $\Delta S_{21} = 0$ となるが、そのと

き, (93)より $G(t)$ が時間に依存しないことがわかる。すなわち G は保存量である。しかも、(99)によれば、 G は同時にそのような対称変換の生成子の意味を持つことがわかる²。

回転対称性の例: 3次元空間の場合の、 $q_k = x_k$ に対する i 軸まわりの回転を考えよう。無限小回転のパラメーターを λ とすると、

$$\begin{aligned} x'_k &= x_k + \lambda \epsilon_{ijk} x_j \\ \therefore \Delta x_k &= \lambda \epsilon_{ijk} x_j \end{aligned} \quad (102)$$

もし作用がこの変換(もちろん $\Delta t = 0$ とする)に対して不変であれば、上記の一般論より、次の量は保存量でありしかもそれが回転の生成子を与える:

$$G \equiv \lambda J_i = p_k \Delta x_k = \lambda p_k \epsilon_{ijk} x_j = \lambda \epsilon_{ijk} x_j p_k \quad (103)$$

明らかにこれは良く知られた角運動量演算子に他ならない。

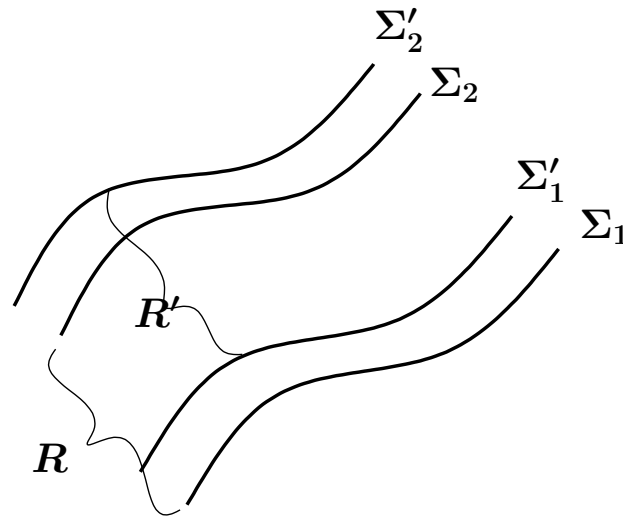
5. 強調しておくべきことは、Schwinger の作用原理はラグランジアン of 形に依らないこと。従ってそれは相互作用がある場合にも適用できる。

²これは量子的 Noether の定理と呼ばれる。

4.2.2 量子作用原理の場の理論への適用

さて、この原理を場の理論に適用してみよう。考える場の集合を $\phi_a(x)$ で表す。粒子の場合と異なり、場は時空上で定義されるから、それらの配位はspace-likeな面 Σ 上で指定されなければならない。その動力学はこの面に垂直な“時間”方向³への発展として記述される。

通常のように、場は空間的な無限遠で十分に早くゼロにいくものと仮定するから、そこでの表面項は効かず、部分積分が自由にできるとする。



³Euclidean の場合でも適当に因子 i を挿入すれば使える。例えば、統計物理では transfer matrix の概念にあたる。

Noether の定理の場合と同様に、二つのタイプの変換を考える：

1. 座標の変化⁴

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu} \quad (104)$$

2. 場の変化

$$\phi'_a(x) = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x) \quad (105)$$

ここで

$\delta\phi_a(x)$ = Lie 変分: 座標変換の効果も含めた上での、同一の座標値での場の値の全変化

これに対して、

$\Delta\phi_a(x)$ = 局所変分: 同一幾何学点での場の値の変化 (後述)

粒子の量子力学の場合と同様に、場の変化は面 Σ 上で定義されたエルミートな演算子 $G[\Sigma]$ で生成される:

$$\delta\phi_a(x) = i[G[\Sigma], \phi_a(x)] \quad (106)$$

⁴いわゆる passive な視点を採用する。すなわち、 x' と x は同じ幾何学的な点を表すと
する。

さて、 R を space-like な面 Σ_1 及び Σ_2 を境界とする領域、 R' をその座標変換(104)でのイメージとする。すると、作用の全変化は

$$\Delta S = \int_{R'} d^n x' \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \delta\partial_\mu\phi) - \int_R d^n x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \quad (107)$$

座標変換に伴う体積要素の変換の Jacobian は:

$$\begin{aligned} M^\mu{}_\nu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \Delta M^\mu{}_\nu \\ J &= \det M = \exp(\text{Tr} \ln(1 + \Delta M)) \simeq 1 + \text{Tr} \Delta M \\ &= 1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \end{aligned} \quad (108)$$

従って、

$$\Delta S = \int_R d^n x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \partial_\mu \delta\phi_a + \mathcal{L} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right) \quad (109)$$

\mathcal{L} は露わには座標に依らないから、最後の項は $\partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu)$ と書き換えられる。部分積分をすると

$$\Delta S = \int_R \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right) \delta \phi_a + \partial_\mu \mathcal{J}^\mu \right\} d^n x \quad (110)$$

$$\text{ここで } \mathcal{J}^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \delta \phi_a + \mathcal{L} \Delta x^\mu = \text{current} \quad (111)$$

Gaussの定理を用いると、最後の項は、表面積分(電荷)の差で書ける：

$$\int_R \partial_\mu \mathcal{J}^\mu d^n x = \int_{\Sigma_2} \mathcal{J}^\mu d\Sigma_\mu - \int_{\Sigma_1} \mathcal{J}^\mu d\Sigma_\mu \quad (112)$$

さて、場の *local variation* (同一幾何学点での変化) $\Delta \phi_a$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \Delta \phi_a(x) &\equiv \phi'_a(x') - \phi_a(x) \\ &= \partial_\mu \phi_a(x) \Delta x^\mu + \delta \phi_a(x) \end{aligned} \quad (113)$$

これを用いてカレントを書き換えると

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} (\Delta \phi_a - \partial_\nu \phi_a \Delta x^\nu) + \mathcal{L} \Delta x^\mu \\
 &= \pi_a^\mu \Delta \phi_a - (\pi_a^\mu \partial^\nu \phi_a - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}) \Delta x_\nu \\
 &= \pi_a^\mu \Delta \phi_a - T^{\mu\nu} \Delta x_\nu
 \end{aligned} \tag{114}$$

$$\text{ここで } \pi_a^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \tag{115}$$

$$T^{\mu\nu} \equiv \pi_a^\mu \partial^\nu \phi_a - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = \text{energy-momentum tensor} \tag{116}$$

$T^{\mu\nu}$ は粒子の場合の Hamiltonian H の一般化である。case.

ここで Schwinger の quantum action principle を適用する:

$$\Delta S = G[\Sigma_2] - G[\Sigma_1] \tag{117}$$

粒子の場合と同様に、直ちに bulk 中の運動方程式を得ると同時に、 $G[\Sigma]$ がチャージとして同定される:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} = 0 \tag{118}$$

$$G[\Sigma] = \int_\Sigma \mathcal{J}^\mu d\Sigma_\mu \tag{119}$$

□ (量子的)Noether の定理

作用が変換に対して不変であると、その変換の生成子はそれが定義されている面 Σ によらず、カレントが保存する:

$$\int_{\Sigma_2} \mathcal{J}^\mu d\Sigma_\mu = \int_{\Sigma_1} \mathcal{J}^\mu d\Sigma_\mu \quad (120)$$

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0 \quad (121)$$

特に、 Σ を平坦な時間一定の面にとると、保存チャージは通常の間をとる:

$$Q = \int \mathcal{J}^0 dV \quad (122)$$

□ 量子化の規則の導出

特に、 $\Delta x^\mu = 0$ (従って $\Delta \phi_a = \delta \phi_a$) の場合を考える。すると、 $\mathcal{J}^\mu = \pi_a^\mu \Delta \phi_a$ となり、作用原理から⁵

$$\Delta \phi_a(\vec{x}, t) = i \left[\int d^3 x' \pi_b^0(\vec{x}', t) \Delta \phi_b(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right] \quad (123)$$

ここでボゾンの場合フェルミオンの場合を区別する必要がある。交換子(-)と反交換子(+)をまとめて $[\]_{\mp}$ と記すと、

$$\begin{aligned} \Delta \phi_a(\vec{x}, t) = & i \int d^3 x' \pi_b^0(\vec{x}', t) \left[\Delta \phi_b(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} \\ & \pm i \int d^3 x' \left[\pi_b^0(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} \Delta \phi_b(\vec{x}', t) \end{aligned}$$

⁵一般には二点が同一の space-like な面に乗っていればよい。ここではその面を時間が一定の面にとっている。

ここで上(下)の符号はボゾン(フェルミオン)の場合を表す。これを満たすには

$$\left[\Delta\phi_b(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} = 0 \quad (124)$$

$$i \left[\pi_b^0(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} = \delta_{ab} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (125)$$

添え字 a と b は任意であるから、最初の式から

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\Delta\phi_b(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} + \left[\phi_b(\vec{x}', t), \Delta\phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} \\ &= \Delta \left[\phi_b(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} \end{aligned} \quad (126)$$

これが任意の変分に対して成り立つためには

$$\left[\phi_b(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} = 0 \quad (127)$$

でなければならない。 $\Delta\pi_a^0$ に対して同様の解析を繰り返すと、

$$\left[\pi_b^0(\vec{x}', t), \pi_a^0(\vec{x}, t) \right] = 0 \quad (128)$$

再度強調しておくが、これらの規則は相互作用がある場合にも成り立つべきである。

□ Globalな内部対称性

この形式の強力さを実感するために、系が global な内部対称性を持つ場合を考える。簡単のため、対称性として $U(1)$ を考える。 ϕ_a を複素場とし、作用が次の global な位相の変換に対して不変とする：

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x) = e^{i\lambda} \phi_a(x), \quad \lambda = \text{実定数} \quad (129)$$

$$\therefore \Delta\phi_a(x) = i\lambda\phi_a(x) \quad (130)$$

対応する保存生成子（チャージ）は

$$G = \int d^3x \pi_a^0 \Delta\phi_a(x) = i\lambda \int d^3x \pi_a^0 \phi_a \equiv i\lambda Q \quad (131)$$

これは π_a^0 が逆のチャージを持つことを意味する

$$\Delta\pi_a^0(x) = i[G, \pi_a^0(x)] = -i\lambda\pi_a^0(x) \quad (132)$$

重要な点は、この変換は、量子化の規則を導いた時に用いた一般的な（内部）変分の特別な場合であることである。従って、こうして導かれた量子的な変換則は 自動的に量子化の規則と整合的になっている。

演習 2. このことを具体的に確かめよ。さらに、これを non-abelian global 変換 $\phi'_a = (e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{T}})_{ab}\phi_b$ の場合に拡張せよ。

4.3 自由場の量子論

4.3.1 スカラー場

次の Lagrange 密度で記述される一成分の相互作用をするエルミートなスカラー場を考える：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2) - V(\phi) \quad (133)$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2 - m^2\phi^2) - V(\phi) \quad (134)$$

共役運動量と Hamiltonian density は

$$\pi = \dot{\phi} \quad (135)$$

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2) + V(\phi) \quad (136)$$

Schwinger の作用原理によれば、相互作用をする場の同時刻交換関係 (ETCR) として次のものを採用するべきである：

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \text{rest} = 0 \quad (137)$$

ラグランジュ方程式（ハミルトニアンから導出される時間発展方程式と同値）は

$$(\partial^2 + m^2)\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (138)$$

相互作用があるため、この方程式の完全解を厳密に求めることはできず、ETCRを物理的なエネルギー運動量の固有モードの生成消滅演算子で実現することは困難である。

しかしながら、相互作用が弱い領域では、 $V(\phi)$ を自由場からの摂動として取り扱うことができる。実際は、相互作用のために、結合定数がエネルギースケールによって変化するから、摂動が良い領域は実はその計算をして見たあとで初めて明らかになることに注意。（cf. QCDの例）

4.3.2 自由なスカラー場の量子化

Masslessのフォノン場の場合と同様に、自由なKlein-Gordon方程式は ϕ について線形であるので、完全な固有振動モードを求めることができる。二つの少し異なる解法を以下に述べる。

3次元 Fourier 変換を用いる方法: この方法は中間段階ではローレンツ共変性が明白でないが、理解はしやすい。まず $\phi(\vec{x}, t)$ を 3次元 Fourier 変換する:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \phi(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (139)$$

これを KG 方程式に入れると、容易に一般解が求まる:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi(\vec{k}, t)}{dt^2} + E_k^2 \phi(\vec{k}, t) &= 0 \\ E_k &\equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \\ \therefore \phi(\vec{k}, t) &= \phi_+(\vec{k}) e^{-iE_k t} + \phi_-(\vec{k}) e^{iE_k t} \end{aligned} \quad (140)$$

$\phi(\vec{x}, t)$ がエルミートであるので、 $\phi(\vec{k}, t)^\dagger = \phi(-\vec{k}, t)$ でなければならず、これより

$$\begin{aligned} \phi_-(\vec{k})^\dagger &= \phi_+(-\vec{k}) \\ \therefore \phi(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\phi_+(\vec{k}) e^{-iE_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \phi_+(-\vec{k})^\dagger e^{iE_k t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \end{aligned}$$

後の便宜上、 $\phi_+(\vec{k})$ を rescale して次の量を定義する：

$$a(\vec{k}) \equiv \sqrt{2E_k} \phi_+(\vec{k}) \quad (142)$$

すると

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) \quad (143)$$

$$\phi^{(+)}(x) = \int d^3k f_k(x) a(\vec{k}) \quad (144)$$

$$\phi^{(-)}(x) = \int d^3k f_k^*(x) a^\dagger(\vec{k}) \quad (145)$$

ここで $k \cdot x \equiv E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x}$ であり、関数 $f_k(x)$ は

$$f_k(x) \equiv \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}} \quad (146)$$

この関数は以下で基本的な役割を果たす。

4次元 Fourier 変換を用いる方法: 同じ結果を明白にローレンツ共変な形で得るには次のような4次元 Fourier 変換を用いるとよい:

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{\phi}(k) e^{-ikx} \quad (147)$$

$$\text{ここで } kx \equiv k_\mu x^\mu = k^0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (148)$$

この段階では k^0 は \vec{k} と独立。これを KG 方程式に代入すると

$$\begin{aligned} \int d^4k (-k^2 + m^2) \tilde{\phi}(k) e^{-ikx} &= 0 \\ \therefore (k^2 - m^2) \tilde{\phi}(k) &= 0 \end{aligned} \quad (149)$$

ここで、 e^{-ikx} の完全性を用いた。この方程式は、*mass shell* 上、すなわち k^μ が $k^2 - m^2 = 0$ を満たす場合を除いて、 $\tilde{\phi}(k)$ がゼロでなければいけないことを言っている。これは、Minkowski空間の場合、非自明な3次元の運動量部分空間を表す。これを考慮に入れると解は

$$\tilde{\phi}(k) = \delta(k^2 - m^2)\chi(k), \quad \chi(k) = \text{任意} \quad (150)$$

エルミート性から $\chi(-k)^\dagger = \chi(k)$ が成り立つ。

ここで、 δ 関数を用いて k^0 積分を実行する。まずよく知られた公式を思い出す：

$$\delta(f(x)) = \sum_{\substack{y \\ f(y)=0}} \frac{\delta(x - y)}{\left| \frac{df}{dy} \right|} \quad (151)$$

これは $f(x)$ をそのゼロ点のまわりで展開し $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$ を用いる

ことによって容易に導かれる。この公式を適用すると

$$\begin{aligned}\delta(k^2 - m^2) &= \delta((k^0)^2 - (\vec{k}^2 + m^2)) = \delta((k^0)^2 - E_k^2) \\ &= \frac{1}{2E_k} (\delta(k^0 - E_k) + \delta(k^0 + E_k))\end{aligned}\quad (152)$$

$$\begin{aligned}\therefore \phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} 2E_k} \int dk^0 (\delta(k^0 - E_k) + \delta(k^0 + E_k)) \chi(k) e^{-ikx} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} 2E_k} \left(\chi(E_k, \vec{k}) e^{-i(E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + \chi(-E_k, \vec{k}) e^{i(E_k + \vec{k} \cdot \vec{x})} \right) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} 2E_k} \left(\chi(E_k, \vec{k}) e^{-i(E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + \chi(-E_k, -\vec{k}) e^{i(E_k - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} 2E_k} (\chi(k) e^{-ik \cdot x} + \chi^\dagger(k) e^{ik \cdot x})\end{aligned}\quad (153)$$

ここで、 $k = (E_k, \vec{k})$ である。 $a(\vec{k})$ を $\chi(k) = \sqrt{2E_k} a(\vec{k})$ と定義すると、以前と同じ結果を得る。

□ $f_k(x)$ の性質と $a(\vec{k})$ の逆解き公式

以下の $f_k(x)$ の性質はこれから有用になる:

$$(i) \quad \int d^3x f_k(x) f_{k'}(x) = \frac{e^{-2iE_k t}}{2E_k} \delta(\vec{k} + \vec{k}') \quad (154)$$

$$(ii) \quad \int d^3x f_k^*(x) f_{k'}(x) = \frac{1}{2E_k} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (155)$$

$$(iii) \quad \int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x) = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (156)$$

$$(iv) \quad \int d^3x f_k(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x) = 0 \quad (157)$$

特に、(iii) は3次元における完全性関係を表し、これを用いると $a(\vec{k})$ を $\phi(x)$ で表すことができる:

$$a(\vec{k}) = \int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \quad (158)$$

$$a^\dagger(\vec{k}) = \int d^3x f_k(x) (-i \overleftrightarrow{\partial}_0) \phi(x) \quad (159)$$

(i) ~ (iv) の証明は容易。例として (iii) をチェックする：

$$\begin{aligned}
 \int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x) &= \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k 2E_{k'}}} \left(e^{ik \cdot x} i \partial_0 e^{-ik' \cdot x} - i \partial_0 e^{ik \cdot x} e^{-ik' \cdot x} \right) \\
 &= \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k 2E_{k'}}} (E_{k'} + E_k) e^{i(k-k') \cdot x} \\
 &= \frac{E_{k'} + E_k}{2\sqrt{E_k E_{k'}}} \delta(\vec{k} - \vec{k}') = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{160}
 \end{aligned}$$

□ $a(\vec{k})$ と $a^\dagger(\vec{k}')$ の交換関係

逆解き公式を使うと、基本的なETCRから $[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$ 等が計算できる。

結果は

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{161}$$

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0 \tag{162}$$

演習 3. これらの交換関係をチェックせよ。

解: 最初の交換関係を示す。

$$\begin{aligned}
 [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= \int d^3x d^3x' [f_k^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x), f_{k'} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x')] \\
 &= \int d^3x d^3x' [f_k^*(x) \pi(x) - \partial_0 f_k^*(x) \phi(x), f_{k'}(x') \pi(x') - \partial_0 f_{k'}(x') \phi(x')] \\
 &= \int d^3x d^3x' (f_k^*(x) i \partial_0 f_{k'}(x') i [\pi(x), \phi(x')]_{ET} \\
 &\quad - f_{k'}(x') i \partial_0 f_k^*(x) i [\pi(x'), \phi(x)]_{ET}) \\
 &= \int d^3x f_k^* i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'} = \delta(\vec{k} - \vec{k}')
 \end{aligned}$$

□ エネルギー、運動量、および自由場の正規順序

Noetherの定理から、保存する4元運動量ベクトルが次のように構成できる:

$$P^\mu = \int d^3x (\pi \partial^\mu \phi - g^{0\mu} \mathcal{L}) \quad (163)$$

$$\therefore E = P^0 = \int d^3x \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2) \quad (164)$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2} \left(\sum_{\mu} \partial^\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 \right) \quad (165)$$

$$P^i = \int d^3x \dot{\phi} \partial^i \phi = \int d^3x \partial^0 \phi \partial^i \phi \quad (166)$$

$\phi = \int d^3k (f_k a(\vec{k}) + f_k^* a^\dagger(\vec{k}))$ であるから、公式 (i) および (ii) を用い

ると、

$$\begin{aligned}
\partial^\mu \phi &= \int d^3 k (-ik^\mu) (f_k(x) a(\vec{k}) - f_k^*(x) a^\dagger(\vec{k})) \\
\int d^3 x \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi &= - \int d^3 k d^3 k' k^\mu k'^\nu (f_k(x) a(\vec{k}) - f_k^*(x) a^\dagger(\vec{k})) \\
&\quad \times (f_{k'}(x) a(\vec{k}') - f_{k'}^*(x) a^\dagger(\vec{k}')) \\
&= - \int \frac{d^3 k}{2E_k} k^\mu k^\nu \left(a(\vec{k}) a(-\vec{k}) e^{-2iE_k t} + a^\dagger(\vec{k}) a^\dagger(-\vec{k}) e^{2iE_k t} \right) \\
&\quad + \int \frac{d^3 k}{2E_k} k^\mu k^\nu \left(a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \right) \tag{167}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m^2 \int d^3 x \phi(x)^2 &= \int \frac{d^3 k}{2E_k} m^2 \left(a(\vec{k}) a(-\vec{k}) e^{-2iE_k t} + a^\dagger(\vec{k}) a^\dagger(-\vec{k}) e^{2iE_k t} \right) \\
&\quad + \int \frac{d^3 k}{2E_k} m^2 \left(a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \right) \tag{168}
\end{aligned}$$

これらの公式中、 $k^0 = E_k$ である。まずエネルギー P^0 を考える。 $-k^\mu k_\mu + m^2 = 0$ であるから、 aa と $a^\dagger a^\dagger$ 部分は消える。残りは $\sum k^\mu k_\mu + m^2 =$

$E_k^2 + \vec{k}^2 + m^2 = 2E_k^2$ 。従って

$$\begin{aligned} P^0 &= \int d^3k \frac{E_k}{2} \left(a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) \right) \\ &= \int d^3k E_k \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (169)$$

運動量 \vec{P} に対しては、被積分関数が \vec{k} の奇関数なので、やはり aa と $a^\dagger a^\dagger$ 部分はゼロになる。従って

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \int d^3k \vec{k} \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right) \\ &= \int d^3k \vec{k} a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) \end{aligned} \quad (170)$$

すでにフォノンの場合に注意したように、エネルギーは無数個のモードのゼロ点振動のために発散する。重力との相互作用を無視する限りにおいては、エネルギーの基準点をどこにとってもよいのでこの項は落とせる⁶。

⁶重力相互作用を考慮すると、これはできない。発散を取り除くには超対称性が必要であると考えられている。

□ 正規順序 (正規順序積)

より有用なのは、normal ordering の概念を導入すること。自由場のレベルでは

“ a to the right, a^\dagger to the left”

のように定義され、 $:$ $:$ と記される。例えば

$$: aa^\dagger : \equiv a^\dagger a, \quad : aaaa^\dagger a^\dagger : := a^\dagger a^\dagger aa \quad (171)$$

従って、以下では

$$: P^0 : = \int d^3k E_k a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \quad (172)$$

を扱う。Normal ordering は場の積に適用され、normal ordered product of fields が定義される。最も簡単な例は: $\phi(x)\phi(y) :$ ナイーブな積は

$$\begin{aligned} \phi(x)\phi(y) &= (\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))(\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)) \\ &= \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) \\ &\quad + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) \end{aligned} \quad (173)$$

$\phi^{(+)}$ ($\phi^{(-)}$)は a (a^\dagger)を含むので、normal orderするには $\phi^{(+)}$ を右に動かせばよい。従って

$$\begin{aligned}
 & : \phi(x)\phi(y) : \\
 &= (\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))(\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)) \\
 &= \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) \\
 &\quad + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)
 \end{aligned} \tag{174}$$

差は $c\#$ であり、

$$\begin{aligned}
 & \phi(x)\phi(y) - : \phi(x)\phi(y) : = [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] \\
 &= \int d^3k d^3k' f_k(x) f_{k'}(y) [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} e^{-ik \cdot (x-y)}
 \end{aligned} \tag{175}$$

となる。ここで $k^0 = E_k > 0$ である。 k^0 は正であるので、これを次の4

次元積分で書くことができる：

$$\left[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y) \right] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (176)$$

$$\text{where } \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (177)$$

$\theta(x)$ は超関数であり、積分の中でのみ定義されるから、 $\theta(0)$ の値は必要がない⁷.

□ Invariant Commutator Function

$\phi(x)$ は任意の x で a と a^\dagger によって定義されるから、交換子 $[\phi(x), \phi(y)]$ を任意の x, y で計算できる：

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \left[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y) \right] + \left[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y) \right] \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik \cdot (x-y)} \\ &\equiv i\Delta(x - y; m^2) \end{aligned} \quad (178)$$

⁷しかしながら、しばしば $\theta(0) = \frac{1}{2}$ と定義するのが有用。

これを invariant commutator function と呼ぶ。

$\epsilon(x)$ は “staircase function” または “stair step function” と呼ばれ

$$\epsilon(x) \equiv \theta(x) - \theta(-x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (179)$$

で定義される階段関数である。

4.4 Invariant Function と Feynman Propagator の性質

4.4.1 Invariant function の性質

Invariant function の定義を再掲する：

$$i\Delta(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx} = [\phi(x), \phi(0)] \quad (180)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} (e^{-ikx} - e^{ikx}) \quad (181)$$

Δ は次の性質を持つ：

1. Klein-Gordon 方程式を満たす。(これは commutator による定義式より明らか。
2. Lorentz invariance: これも定義から明らかであるが、具体的には $\int d^4k \delta(k^2 - m^2) = d^3k / E_k$ が Lorentz 不変であることから言える。
3. 奇関数: $\Delta(-x) = -\Delta(x)$

∴

$$\begin{aligned}
 \Delta(-x) &= \frac{1}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{+ikx} \\
 &\stackrel{k \rightarrow -k}{=} \frac{1}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(-k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx} \\
 &= -\Delta(x)
 \end{aligned} \tag{182}$$

ここで $\epsilon(-k^0) = -\epsilon(k^0)$ を用いた。

この奇関数性は、commutator としての定義からも明らか。

4. Micro-causality: 即ち、space-like separation に対して $\Delta(x)$ はゼロとなる。

$\Delta(x)$ は Lorentz-invariant ゆえ、 $t = 0, \vec{x} \neq 0$ の場合を考えれば十分。
上記の奇関数性より

$$\Delta(\vec{x}, t = 0) = -\Delta(-\vec{x}, t = 0)$$

しかるに

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{x}, t = 0) &= \frac{1}{i} \int \frac{d^3 k dk^0}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ &= \frac{1}{i} \int \frac{d^3 k dk^0}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \Delta(-\vec{x}, t = 0) \end{aligned}$$

従って

$$\Delta(x) = 0 \quad \text{for } x^2 < 0 \quad (183)$$

このことより、space-like に離れた点では、 $\phi(x)$ と $\phi(0)$ は同時対角化
でき因果的に無関係となっている。

5. 時間微分に対する性質：

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Delta(x) |_{t=0} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \left(-iE_k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} - iE_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) = -i\delta(\vec{x})$$

もとの commutator の定義に戻って考えれば、次の正準交換関係

$$\left[\dot{\phi}(\boldsymbol{x}), \phi(\mathbf{0}) \right]_{ET} = \frac{1}{i} \delta(\vec{x}) \quad (184)$$

を表しており、当然である。

4.4.2 Feynman Propagator とその性質

場 $\phi(x)$ を annihilation part $\phi^{(+)}(x)$ と creation part $\phi^{(-)}(x)$ に分解する：

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) \quad (185)$$

すると、

$$\phi(x)|0\rangle = \phi^{(-)}(x)|0\rangle \quad x \text{ での粒子の生成} \quad (186)$$

$$\langle 0|\phi(x) = \langle 0|\phi^{(+)}(x) \quad (187)$$

従って、次の相関関数は y で粒子を create して x で annihilate する amplitude を表す。

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \langle 0|\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)|0\rangle \quad (188)$$

但し、この解釈が成り立つには $x^0 > y^0$ の時間順序になっていなければならない。 $x^0 < y^0$ の場合も併せて考えると

$$\begin{aligned} x^0 > y^0 & \quad \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\ x^0 < y^0 & \quad \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \end{aligned}$$

従って次の時間順序積 (Time-ordered product or T-product) を定義するのが自然。

$$T(\phi(x)\phi(y)) \equiv \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x)$$

これを用いて Feynman propagator を次のように定義：

$$i\Delta_F(x - y; m^2) \equiv \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle \quad (189)$$

これは粒子の x - y 間の伝播の振幅を表す。

□ T-product の Lorentz 不変性 :

T-product の定義は Lorentz 不変であろうか。これを調べるには $\theta(x^0 - y^0) + \theta(y^0 - x^0) = 1$ を用いて次のような書き換えをするとよい :

$$T(\phi(x)\phi(y)) = \theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)] + \phi(y)\phi(x) \quad (190)$$

一般に $\theta(x^0 - y^0)$ 自体は Lorentz 不変ではない:

- $x - y$ が time-like ならば、 $(x^0 - y^0)^2 > (\vec{x} - \vec{y})^2$ 、ゆえ $x^0 - y^0$ はゼロになれないので、連続的な proper Lorentz 変換ではその符号を変えることはなく、従って $\theta(x^0 - y^0)$ は Lorentz 不変である。
- $x - y$ が space-like な場合には、 $(x^0 - y^0)^2 < (\vec{x} - \vec{y})^2$ であり、 $x^0 - y^0$ はゼロを經由して正にも負にもなり得るから $\theta(x^0 - y^0)$ は Lorentz 不変でない。

しかしまさしく space-like な場合 micro-causality より $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ であるので、結局 T-product は Lorentz 不変な概念 であることがわかる。

□ Feynman propagator の具体形 :

$i\Delta_F$ は次のように invariant function Δ で表すことができる :

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x - y) &= \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi^{(+)}(y)\phi^{(-)}(x) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)] | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) i\Delta(x - y) + \theta(y^0 - x^0) i\Delta(y - x) \end{aligned} \tag{191}$$

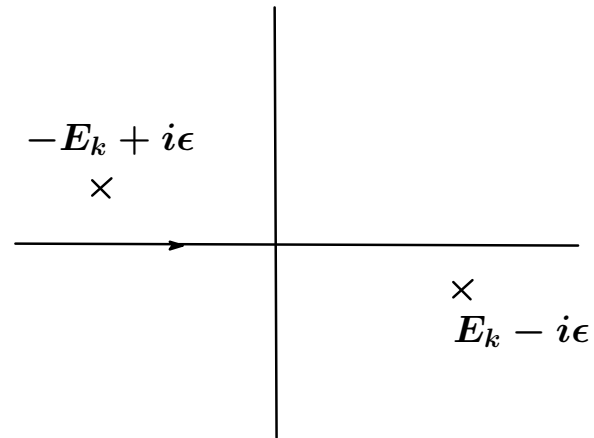
Δ の運動量表示を用いると

$$i\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \theta(x^0 - y^0) \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{2E_k} + \theta(y^0 - x^0) \frac{e^{-ik \cdot (y-x)}}{2E_k} \right\} \quad (192)$$

{ }内は便利な積分表示を持つことを見よう。次の積分を複素積分として考える：

$$I \equiv \int \frac{dk^0}{2\pi i} \frac{e^{-ik^0(x^0 - y^0)}}{(k^0 - E_k + i\epsilon)(k^0 + E_k - i\epsilon)} \quad (193)$$

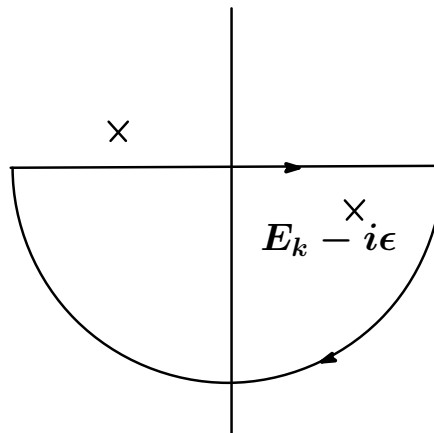
k^0 -planeでの pole の位置を図示すると、



Complex k^0 に対して

$$e^{-ik^0(x^0-y^0)} = e^{-i\Re k^0(x^0-y^0)} e^{\Im k^0(x^0-y^0)} \quad (194)$$

- $x^0 - y^0 > 0$ の場合、下半面で $\Im k^0 < 0$ であるから、そこで contour を閉じれば積分は無遠の半円周で収束する。



留数定理より $k^0 = E_k - i\epsilon$ の pole からの寄与を拾って

$$I = \frac{1}{2\pi i} (-2\pi i) \frac{1}{2E_k} e^{-iE_k(x^0 - y^0)} = -\frac{1}{2E_k} e^{-iE_k(x^0 - y^0)} \quad (195)$$

● 同様に $x^0 - y^0 < 0$ の場合には、上半面で contour を閉じて

$$I = -\frac{1}{2E_k} e^{-iE_k(y^0 - x^0)} \quad (196)$$

を得る。併せると

$$I = - \left\{ \theta(x^0 - y^0) \frac{1}{2E_k} e^{-iE_k(x^0 - y^0)} + \theta(y^0 - x^0) \frac{1}{2E_k} e^{-iE_k(y^0 - x^0)} \right\}$$

従って

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x - y) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x - y)}}{(k^0 - E_k + i\epsilon)(k^0 + E_k - i\epsilon)} \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x - y)}}{(k^{02} - (E_k - i\epsilon)^2)} \end{aligned} \quad (197)$$

ここで

$$\begin{aligned} k^{02} - (E_k - i\epsilon)^2 &= k^{02} - (\vec{k}^2 + m^2) + 2i\epsilon E_k \\ &= k^2 - m^2 + i\epsilon \end{aligned} \quad (198)$$

と書けるから、最終的に次の重要な積分表示を得る：

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (199)$$

□ $\Delta_F(x - y)$ の性質：

1 $\Delta_F(x - y)$ は δ -関数 source を持つ Klein-Gordon 方程式の解、すなわち Green 関数になっている。 これを二つの方法で示す。

- T-product による $i\Delta_F$ の定義を用いる方法： $\phi(x)$ が KG equation を満

たすことを用いると、

$$\begin{aligned}
 & (\partial^2 + m^2)i\Delta_F(x - y) \\
 &= (\partial^2 + m^2)\langle 0|\theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)] + \phi(y)\phi(x)|0\rangle \\
 &= (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\langle 0|\theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle \quad (200)
 \end{aligned}$$

$\partial_t^2 (\theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)])$ は、順次 ∂_t を働かせ、 $[\dot{\phi}(x), \phi(y)]_{ET} = -i\delta(\vec{x} - \vec{y})$ 、及び $[\phi(x), \phi(y)]|_{ET} = 0$ を用いて計算する。

$$\begin{aligned}
 & \partial_t (\theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)]) \\
 &= \underbrace{\delta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)]}_0 + \theta(x^0 - y^0)[\dot{\phi}(x), \phi(y)] \\
 & \partial_t^2 (\theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)]) \\
 &= \delta(x^0 - y^0)[\dot{\phi}(x), \phi(y)] + \theta(x^0 - y^0)[\ddot{\phi}(x), \phi(y)]
 \end{aligned}$$

従って、

$$\partial_t^2 \theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)] = -i\delta^4(x - y) + \theta(x^0 - y^0)[\partial_t^2 \phi(x), \phi(y)]$$

となる。第二項は $-\nabla^2 + m^2$ と併せて $(\partial^2 + m^2)\phi(x)$ を形成し、ゼロ

となるので結局

$$(\partial^2 + m^2)i\Delta_F(x - y) = -i\delta^4(x - y) \quad (201)$$

を得る。

- 具体的な積分表示を用いる方法： まず次の有用な公式を導いておく

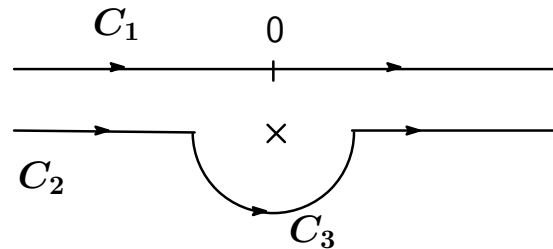
$$\frac{1}{\alpha + i\epsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{\alpha} - i\pi\delta(\alpha) \quad (202)$$

ここで $\mathcal{P}\frac{1}{\alpha}$ は Cauchy の主値 (principal value) であり、ゼロを含む区間 $[a, b]$ の積分において

$$\int_a^b d\alpha \mathcal{P}\frac{1}{\alpha} f(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{-\epsilon} d\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha} + \int_{\epsilon}^b d\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha} \right) \quad (203)$$

で定義される。

証明: $f(\alpha)$ を $f(0)$ = finite な連続関数とし、図のような contour $C_1, C_2 + C_3$ に沿った積分 $\int d\alpha f(\alpha)/(\alpha + i\epsilon)$ を考える。



但し C_3 は無限小の半円部分、 C_2 はこれを除いた部分とする。すると明らかに、

$$\int_{C_2} + \int_{C_3} - \int_{C_1} = \text{residue at } \alpha = -i\epsilon$$

C_3 に沿った積分は容易に

$$\int_{C_3} = f(-i\epsilon) \int_{\pi}^{2\pi} i d\theta = \pi i f(0)$$

従って

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} d\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha + i\epsilon} &= \int_{C_2} d\alpha \mathcal{P} \frac{1}{\alpha} f(\alpha) + \pi i f(0) - \underbrace{2\pi i f(0)}_{\text{pole part}} \\
 &= \int d\alpha \mathcal{P} \frac{1}{\alpha} f(\alpha) - i\pi \int d\alpha \delta(\alpha) f(\alpha) \quad (204)
 \end{aligned}$$

準備が整ったので、 $\Delta_F = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-k \cdot (x-y)} / (k^2 - m^2 + i\epsilon)$ に $i(\partial^2 + m^2)$ を働かせると、以下の右辺で、 \mathcal{P} 部分から -1 、 δ 関数部分からは 0 を得るので

$$\begin{aligned}
 &i(\partial^2 + m^2) \Delta_F(x) \\
 &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-k^2 + m^2) \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{k^2 - m^2} - i\pi \delta(k^2 - m^2) \right\} e^{-ik \cdot x} \\
 &= -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} = -i \delta^4(x) \quad (205)
 \end{aligned}$$

2 $\Delta_F(x)$ の具体形とその漸近的振る舞い:

具体的な形はベッセル関数の積分表示を用いると次のようになる⁸ :

$$\Delta_F(x) = -D^c(x) = -\frac{1}{4\pi}\delta(x^2) + \frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}}\theta(x^2) \left(J_1(m\sqrt{x^2}) - iN_1(m\sqrt{x^2}) \right) - \frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-x^2}}\theta(-x^2)K_1(m\sqrt{-x^2}) \quad (206)$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad \text{for large positive } z$$

特徴は、 $x^2 > 0$ (time-like) な場合は振動し、 $x^2 < 0$ (space-like) のときは遠距離で exponential 的に damp する。

⁸Bogoliubov -Shirkov